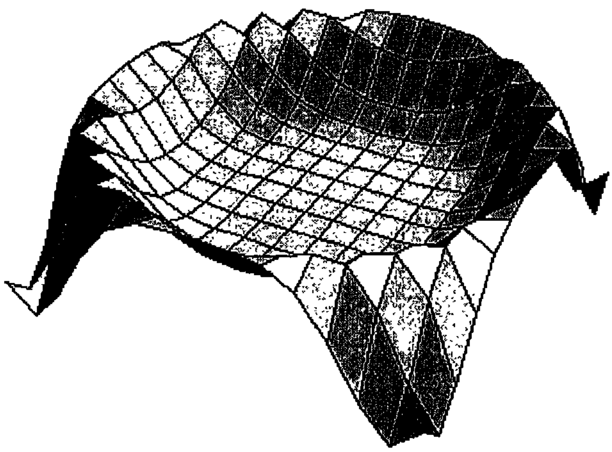
ماثيماتيكا
الرياضيات باستخدام الكومبيوتر



دكتور/ رأفت رياض رزق الله

أستاذ مساعد بقسم الرياضيات

كلية التربية - جامعة عين شمس

الناشر

المكتبة الأكاديمية

٢٠٠٠

ماثيماتيكا
الرياضيات باستخدام الكومبيوتر

المكتبة الأكاديمية

١٢١ شارع التحرير – الدقى – القاهرة

تليفون : ٣٤٨٥٢٨٢ / ٣٤٩١٨٩٠

فاكس : ٣٤٩١٨٩٠ – ٢٠٢

برنامج ماثيماتيكا ***Mathematica*** من تصميم ***Stephen Wolfram*** ويعتبر البرنامج علامة مسجلة من إنتاج شركة ***Wolfram Research***

مقدمة

برنامج ماثيماتيكا هو نظام عام لعمل الحسابات العلمية ويستخدمه الآن العديد من الباحثين فى مجال الرياضيات والهندسة فى معظم أنحاء العالم وتطبيقات برنامج ماثيماتيكا تدخل فى العديد من العلوم كما يستخدم كلغة برمجة ولقد ظهر برنامج ماثيماتيكا فى عام 1988 وقام بتصميمه **Stephen Wolfram** الذى قام بتأسيس شركة **Wolfram Research** حيث تم تطوير برنامج ماثيماتيكا وظهر له إصدارات على العديد من نظم الكومبيوتر مثل نظام التشغيل **DOS** ونظام النوافذ **Windows** وماكينتوش **Mackintosh** وكيفية التعامل مع الأوامر المختلفة مع التوضيح بالأمثلة المتعددة فى فروع الرياضيات المختلفة وقد تم تقسيم الكتاب إلى سبعة أبواب كالآتى :

الباب الأول : ما هو ماثيماتيكا؟

الباب الثانى : ماثيماتيكا والحسابات العددية

الباب الثالث : ماثيماتيكا والجبر

الباب الرابع : ماثيماتيكا والتفاضل والتكامل

الباب الخامس : ماثيماتيكا ورسم الدوال

الباب السادس : ماثيماتيكا والتحليل العددى

الباب السابع : البرمجة فى ماثيماتيكا

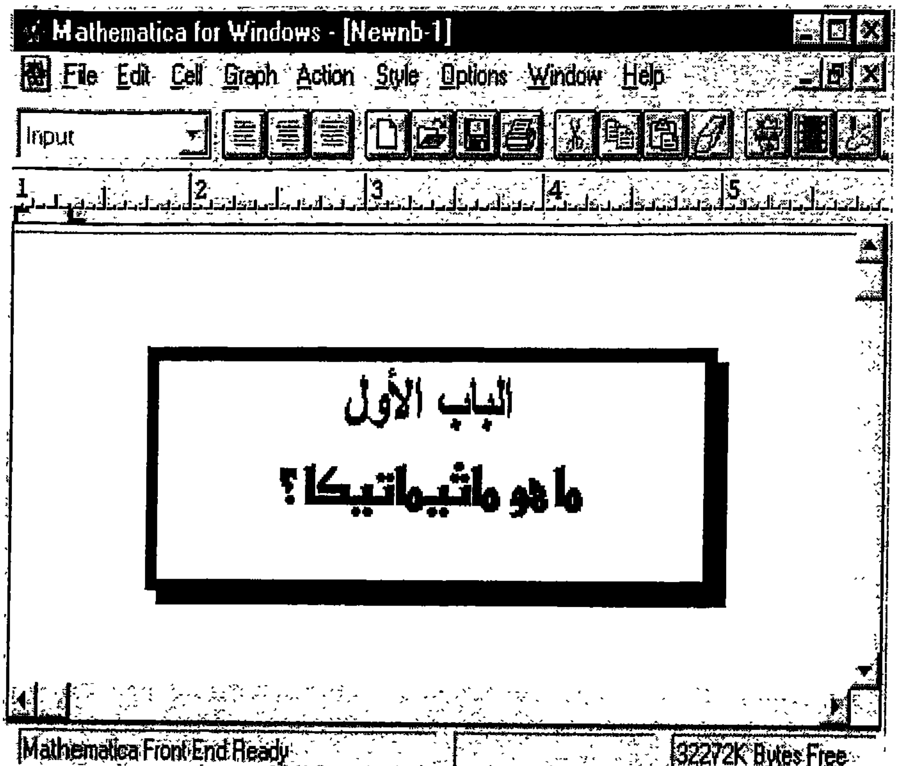
المحتويات

الصفحة

الصفحة

الصفحة

الصفحة



في هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكا والخاصة بالموضوعات الآتية :

١ . تشغيل ماثيماتيكا من خلال برنامج النوافذ Windows
٢ . القلب والواجهة فى ماثيماتيكا
٣ . الحصول على معلومات من ماثيماتيكا
٤ . التعبيرات فى ماثيماتيكا

الباب الأول

ما هو ماثيماتيكا ؟
What is Mathematica ?

برنامج ماثيماتيكا هو نظام عام **General System** لعمل الحسابات والعمليات الرياضيـــــــة المختلفة وهو برنامج مفيـــد ومتعدد الأغراض ويخدم قطاعا كبيرا مـــن التخصصات العلميـــــة المختلفة . وبرنـــامج ماثيماتيكـــا يقـــوم بـأجراء العمليـــات الحســـابية العدديـــة **Numerical Calculations** المتعارف عليها مثل الجمـــع والطرح والضرب والقسمة وحســـاب الأسس واللوغاريتمات والـــدوال المثلثيــــة والزائدية ســـــواء للأعـــداد الحقيقيـــة **Real Numbers** أو الأعـــداد المركبـــة **Complex Numbers** وكذلك يقوم بأجراء العمليات الرياضية الرمزية **Symbolic** المتعارف عليها فى فروع كثيرة من الرياضيات مثل الجبر والتفاضل والتكامل والجبر الخطى والمعادلات التفاضلية والدوال الخاصة والتحليل العددى والاحتمالات والإحصاء والبرمجة الخطية ، كما أن ماثيماتيكا يقوم برسم الدوال ســـواء المباشرة أو البارامترية فى بعدين أو ثلاثة أبعاد بالإضافة الى إمكانات متقدمة فى الرسم البيانى وإنتاج وثائـــــق رياضيـــة تتضمن النصوص والمعادلات والرموز الرياضية والرسومات معا وكذلك يمكن اســـتخدام ماثيماتيكا كلغة برمجة لكتابة برامج تحل مشكلات كبيرة يعجز عن حلهـــا أمـــر واحـــد وهذه البرامج لا تتعامل فقط مع الأعداد ولكن تتعامل أيضاً مع التعبيرات الرمزية ومـــع الأشكال المرسومة .

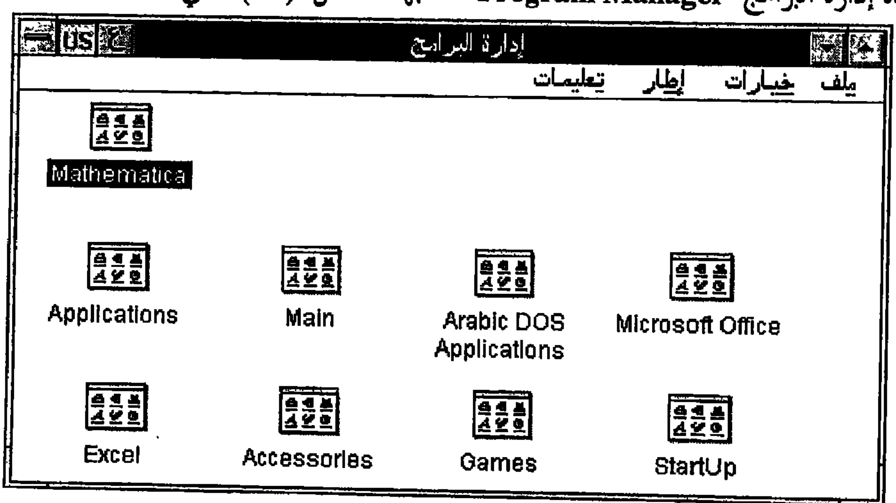
ولغة ماثيماتيكا تعتبر لغة عالية المستوى جـــدا Very High Level Language ويطلق عليها أيضا لغـــة الجيـــل الرابـــع Fourth Generation Language لأنها تفعل فى خطوة واحدة مـــا تفعله اللغات عالية المستوى (مثل بيســـك BASIC وفورتـــران FORTRAN وسى C وباسكال PASCAL وغيرها) فى عدة خطوات . ويوجد داخل برنامج ماثيماتيكا built - in اكـــثر من 1000 دالة تخدم فروع الرياضيات المختلفة .

وبرنامج ماثيماتيكا قام بتصميمـــه Stephen Wolfram وقـــامت شـــركة Wolfram Research بتقديـــــم الإصـــــدار الأول mathematica 2.0 فى عام ١٩٨٨ ثم ظهـــر الإصـــدار الثـــانى mathematica 2.1 والإصدار الثالث mathematica 2.2

وقبل أن نتعرف على استخدامات ماثيماتيكا سوف نعرض أولا كيفيـــة تشغيل برنامج ماثيماتيكا من خلال برنامج النوافذ Windows .

١ـ تشغيل ماثيماتيكا من خلال برنامج النوافذ Windows

قدمت شركة مايكروسوفت برنامج النوافذ Microsoft Windows فى العديد من الإصدارات ويمكن من خلاله تشغيل عدة برامج فى وقت واحد وتبادل المعلومات بينهما وهذا الأسلوب يعرف بأسلوب تعدد المهام multitasking ويقوم برنامج النوافذ بتقسيم الشاشة الى مناطق تعرف بالنوافذ أو الإطارات وكل نافذة تطل على برنامج أو مجموعة من البرامج ولكل نافذة عنوان يكتب على قمة النافذة ويتم تشغيل البرامج من داخل النوافذ بأسلوب حدد الهدف الذى تختاره ثم أطلق point and shoot آي وجه المؤشر نحو البرنامج المطلوب تنفيذه ثم اضغط زر الفأرة الأيسر أو اضغط مفتاح الإدخال Enter . وبرنامج النوافذ مثل البرامج التطبيقية الأخرى يمكن تشغيله من محث نظام التشغيل فإذا تم إنزاله على الاسطوانة الصلبة Hard Disk فإنه يمكن تشغيله مباشرة عن طريق كتابة win ثم نضغط على مفتاح الإدخال Enter وعند بدء تشغيل برنامج النوافذ فى الإصدار 3.1 سوف تظهر نافذة إدارة البرامج Program Manager مشابهة للشكل (١) الآتي

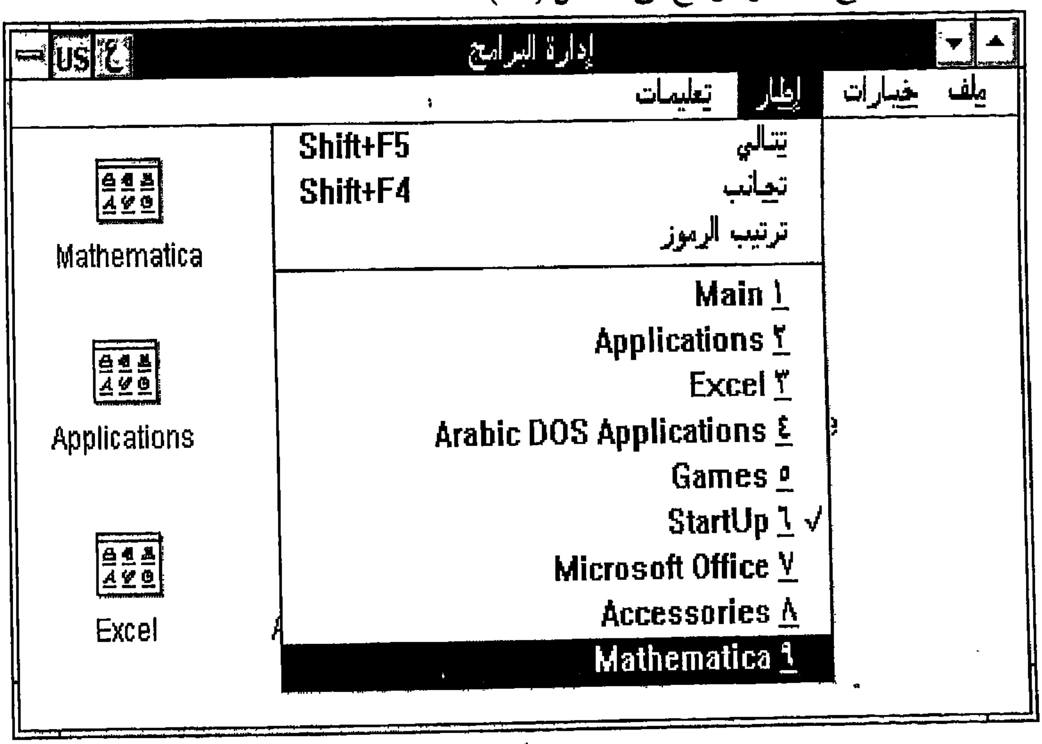


شكل (١)

وهناك عدة طرق لبدء تشـــغيل برنامج ماثيماتيكا

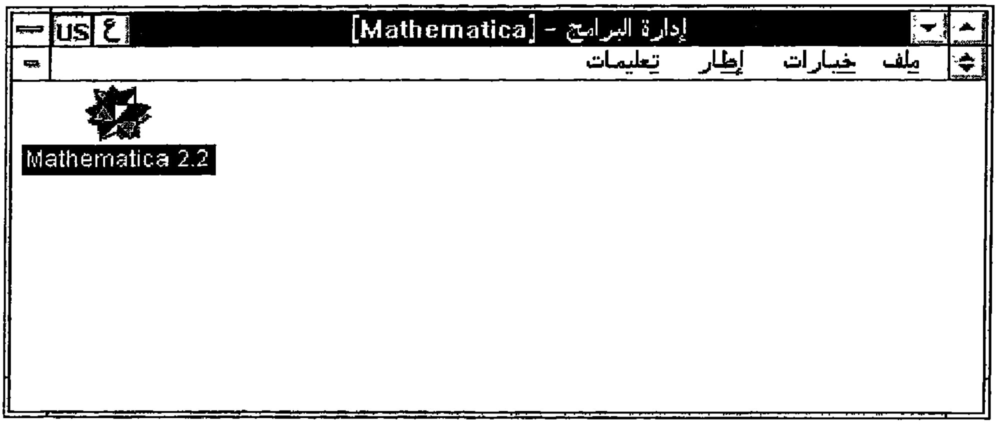
- يمكن بدا تشـــــغيله من مدير البرامج Program Manager كما نفعل مـــع معظم تطبيقات برنامج النوافذ Windows .
- كما يمكن تشغيله من مدير الملفات File Manager الموجود بالنافذة الرئيسية Main وذلك بأن ننقر فوق أسم الملف ma.exe .

وفي الإصدار الأول mathematica 2.0 كان يتم تشغيل برنامج ماثيماتيكا مـــن بيئـــة نظام التشغيل Dos مباشرة ، وبفرض أن برنامج ماثيماتيكا mathematica 2.2 قد تم إنزاله على الاسطوانة الصلبة بجهاز الكومبيوتر وذلك من خلال برنامج النوافذ Windows وانـــه موجود في إطار من إطارات برنامج النوافذ تحت أسم Mathematica ويجعل هذا الإطار هو الإطار النشط وذلك عن طريق اختيار البرنامج Mathematica من قائمة إطار Window في إدارة البرامج كما هو موضح في الشكل (٢)



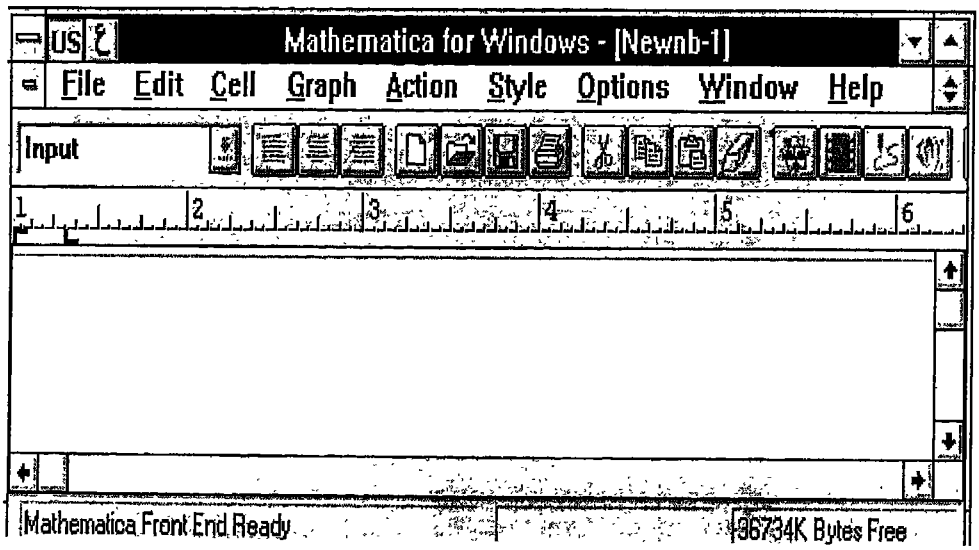
شـــــكل (٢)

وبعد الضغط على زر الفأرة يتم الدخول الى النافذة الخاصة ببرنامج ماثيماتيكا وسوف تظهر شاشة مثل الموضحة فى شكل (٣)



شكل (٣)

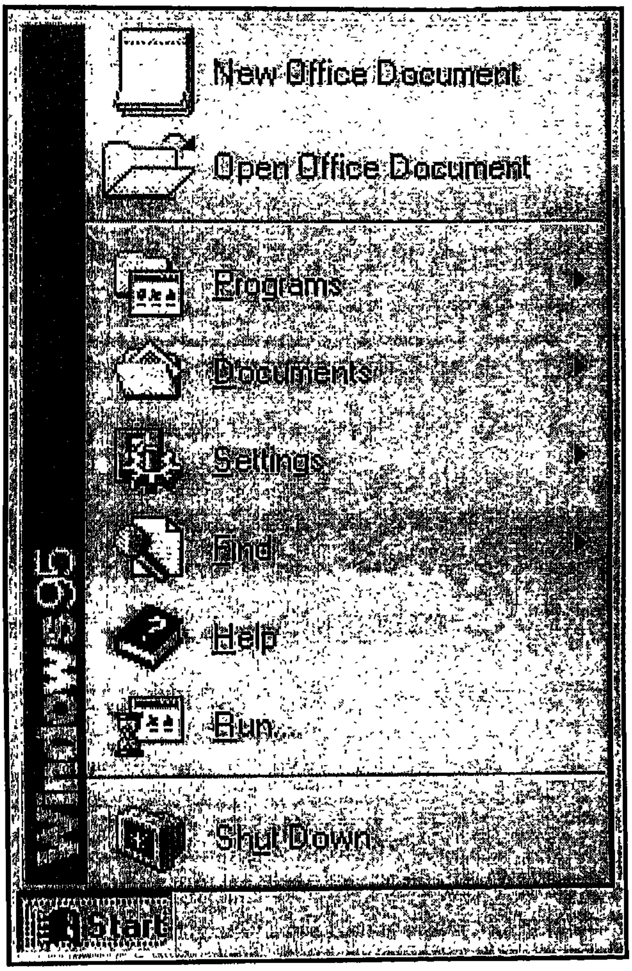
حيث تظهر أيقونة الرمز الخاص ببرنامج ماثيماتيكا  وعن طريق النقر مرتين بسرعة على هذا الرمز بواسطة الفارة mouse بعد لحظات تظهر الشاشة المبينة فى شكل (٤)



شكل (٤)

وإذا كان برنامج النوافذ المستخدم  **Windows 95** فانه عند الضغط علـــى المربع 

الموجود فى اسفل الشـــاشة من جهة اليســـار فســـوف تظهر قائمة كالموضحة فى الشكل (٥) .



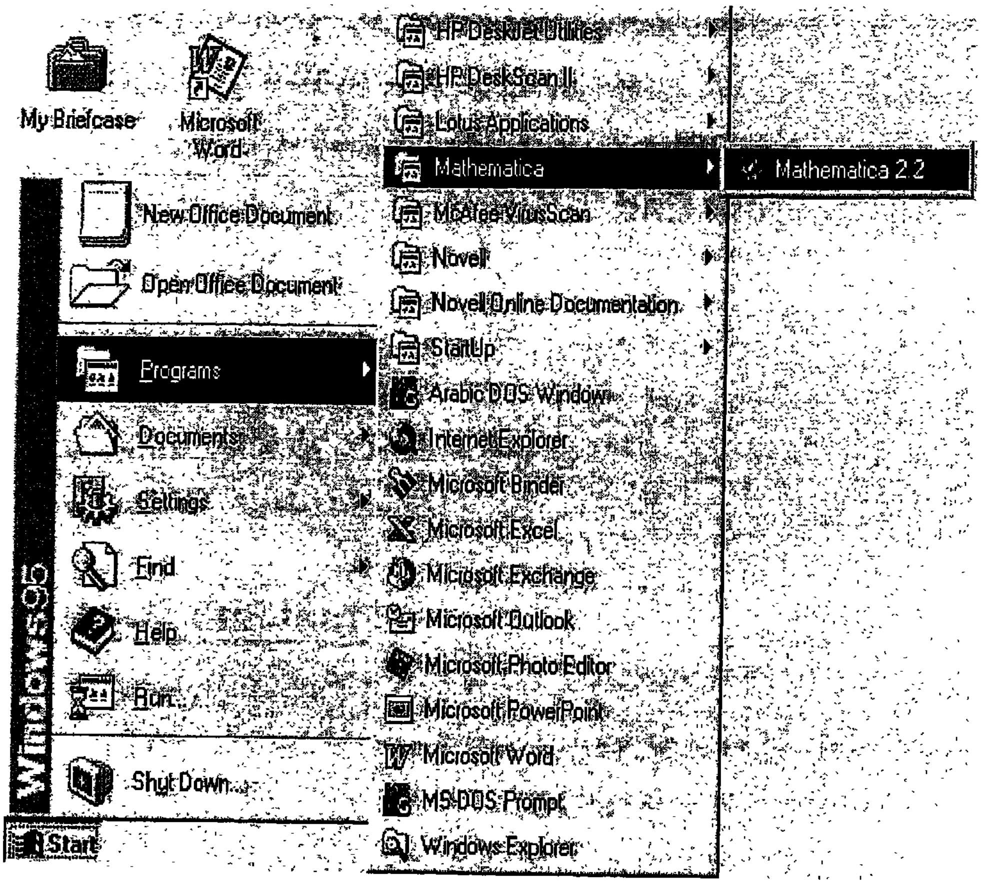
شكل (٥)

وبتحريك مؤشر الفارة الى الاختيار **Programs** ثم الضغط على زر الفارة تظهر قائمة أخـــرى مثل الموضحة بالشكل (٦) ثم نضغط بزر الفارة على البرنامج 

فتظهر الأيقونة الخاصة ببرنامج ماثيماتيكا 

وبالضغط عليهـــا

يبدءا تحميل برنامج ماثيماتيكا وتظهر شاشة كالمبينة فى شكل (٤) ويتم ذلك علـــى اعتبـــار أن برنامج ماثيماتيكا **mathematica 2.2** قد تم إنزاله على الاسطوانة الصلبة بجهاز الكومبيوتر .



شكل (٦)

وسوف نتعرف الآن على تركيب ماثيماتيكا كبرنامج ، حيث تتيح معرفة هذا التركيب فهما اكثر لما يحدث أثناء استخدامنا لبرنامج ماثيماتيكا على الكومبيوتر .

٢ـ القلب والواجهة فى ماثيماتيكا
Kernel and Front End in Mathematica

يتكون برنامج ماثيماتيكا من جزئيين أساسيين هما

- القلب **Kernel**
- والواجهة **Front End**

أما القلب Kernel

فهو الجزء الذي يقوم بتنفيذ العمليات الرياضية المطلوبة ، ويتم تحميل القلب عن طريق كتابـــة آي عملية حسابية بسيطة فى بداية التشغيل مثل ١+١ ثم نضغط على زر التنفيذ وهو مفتاح **Insert** الموجود على يمين لوحة المفاتيح ، ويمكن تحميل القلب مع بداية تشـــغيل ماثيماتيكا عـــن طريـــق اختيار **Option** فى قائمة الاختيارات

وأما الواجهة Front End

فهي حلقة الوصل بين المستخدم User والقلب Kernel وعندما يعطى المســـتخدم أمـــر ما لماثيماتيكا لتنفيذه فانه فى الحقيقة يعطيه للواجهة التي تقوم بترجمته الى شفرات خاصة يفهمهـــا القلب ، وعندما ينفذ القلب هذا الأمر فانه يخرج النتائج على هيئة شفرات تقوم الواجهة بترجمتها الى أرقام أو حروف أو رسومات أو ألوان حسب نتائج الأوامر المعطاة ويتم عرضها على الشاشة بطريقة يمكن فهمها والاستفادة منها وشكل(٧) يوضح العلاقة بين المستخدم والواجهة والقلب .

	⟶	Front End	⟶	Kernel
User	⟵	الواجهة	⟵	القلب

شكل (٧)

وبرنامج ماثيماتيكا يوجد له إصدارات على العديد من نظم الكومبيوتر مثل نظام التشغيل دوس DOS ونظام وندوز Windows وماكينتوش Makintosh ونظام يونيكس Unix ، وفي كل هذه النظم يوجد نفس القلب أما الواجهة فتختلف من نظام الى آخر بمعنى أن ماثيماتيكا على كل نظام من هذه النظم قادر على أداء نفس القدر من العمليات الرياضية وإخراج نفس النتائج ، والشكل (٤) يمثل الواجهة فى نظام وندوز .

وطريقة إدخال الأوامر فى ماثيماتيكا يكون بظهور المحث Prompt على الصورة

In[n] :=

حيث يقوم المستخدم بكتابة المدخلات أو الأمر المطلوب تنفيذه وبعد الضغط على زر التنفيذ **Insert** الموجود على يمين لوحة المفاتيح يقوم ماثيماتيكا بطباعة الناتج Output بجانب المحث

Out[n]=

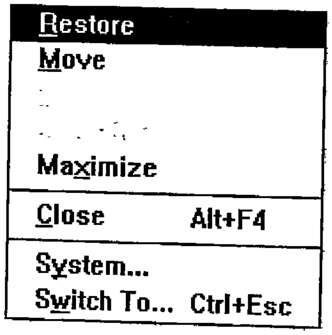
حيث n يمثل رقم المدخل لان ماثيماتيكا يقوم بترقيم كل مدخلا ته في ترتيب تصاعدى . بالنظر الى واجهة ماثيماتيكا فى شكل (٤) نرى أن الشاشة تنقسم الى ثلاثة أجزاء أساسية الجزء العلوى به أربعة صفوف

الصف الأول من أعلى عبارة عن الشريط الموضح



ويحتوى على الآتي :

– فى الركن الأيسر يوجد مربع صغير يسمى قائمة التحكم Control Panel وهو موجود في جميع تطبيقات النوافذ وبتحريك مؤشر الفارة نحو هذا المربع ثم الضغط على زر الفارة تفتح قائمة التحكم الآتية



ومن خلال هذه القائمة يمكن نقل Move أو تكبير Maximize أو تصغير Minimize نافذة البرنامج أو غلق النافذة Close والخروج من البرنامج أو التبديل الى برنـــامج آخـــر Switch To

– المربع US بالضغط عليه بالفارة يتم تحويل الكتابة الى اللغة الإنجليزية

– المربع E بالضغط عليه بالفارة يتم تحويل الكتابة الى اللغة العربية

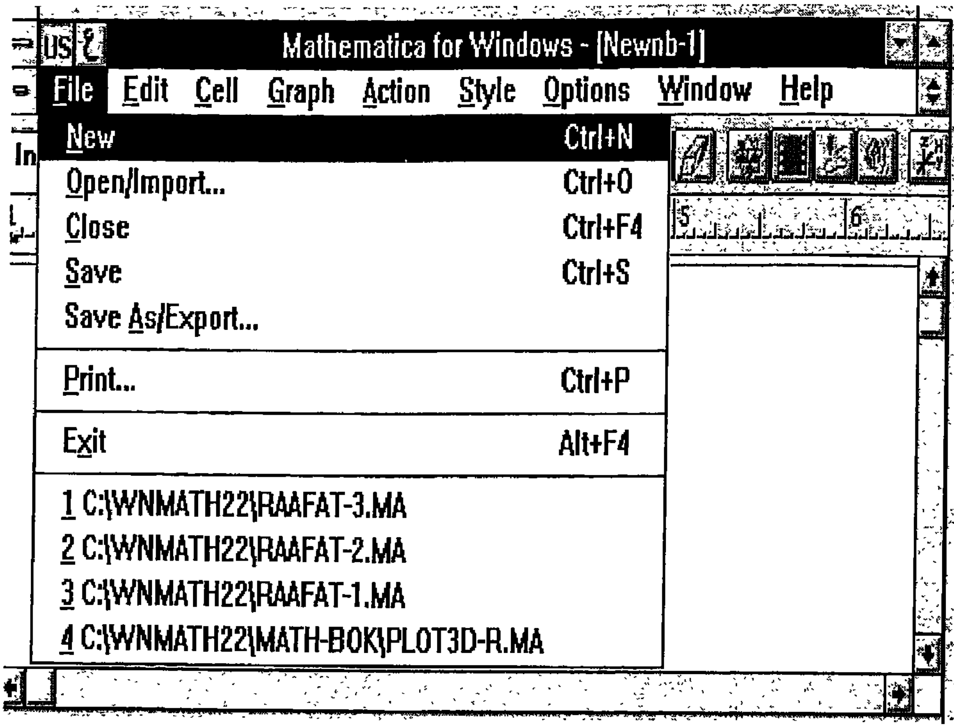
– فى منتصف الشريط يوجد عنوان البرنامج Mathematica for Windows واسم الملـــف الذى يتم التعامل معه وبرنامج ماثيماتيكا يقوم بإعطاء الاسم Newnb-1 للملف عنـــد بدايـــة التشغيل ويمكن للمستخدم حفظ الملف بعد ذلك بالاسم الذى يريده

– فى الركن الأيمن يوجد مثلثان صغيران أحدهما يشير الى أعلى ▲ ويستخدم لتكبير واجهـــة البرنامج والأخر الى اسفل ▼ ويستخدم لتصغير واجهة البرنامج ويتم ذلك عن طريق تحريك مؤشر الفارة نحو رمز المثلث المطلوب ثم الضغط على زر الفارة .

الصف الثانى من أعلى هو صف القائمة الرئيسية Bar menu وبه مجموعة الاختيـــارات الآتية

File Edit Cell Graph Action Style Options Window Help

وبتحريك المؤشـــــر نحو الاختيار المطلوب ثم الضغط على زر الفارة الأيســـر فانه يخرج من هذا الاختيار قائـــمة مســـــحوبة تســـمى بالقائمة العمودية وبها مجموعـــة من الاختيـــارات التـــى تســـهل من العمل داخل ماثيماتيكا ، فمثلا عند الضغط بالفارة على الاختيار File الموجـــود فى صف القائمـــة الرئيســـــية (أو بالضغط على مفتاح Alt مع الحرف F) تظهر الشاشـــة الموضحة بالشكل (٨) وبها نجد مجموعة من الاختيارات الفرعية فى القائمة العمودية .



شـــــكل (٨)

وبرنامج ماثيماتيكا يخصص بعض المفاتيح لأداء مهمة معينة والرموز الخاصة بهذه المفاتيح تكتـــب أمام الخيار فى القائمة ويطلق عليها مفاتيح الاختصار **Sort Cut Keys** فمثلا القائمة الخاصة بالاختيار **File** تحتوى على الآتي :

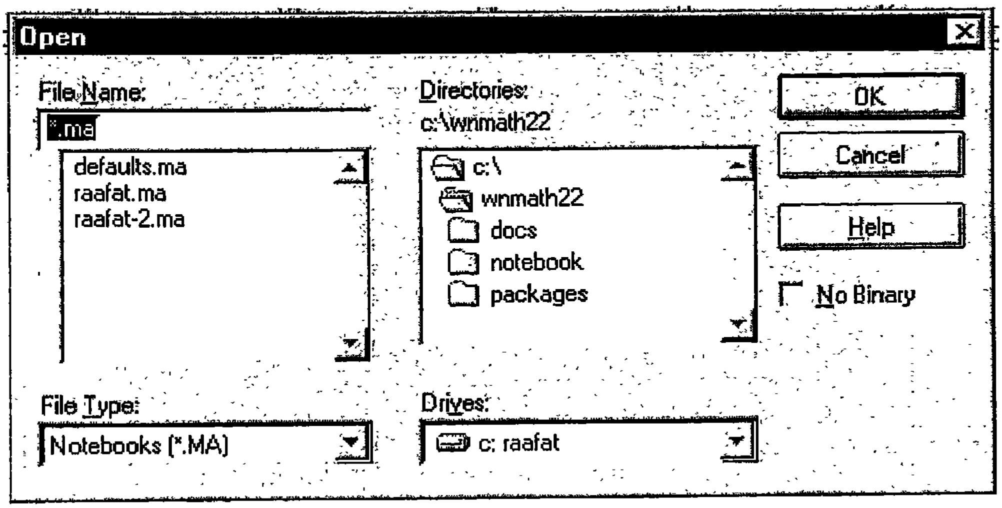
الخيار	مفاتيح الاختصار	الوظيفة التى يقوم بها الخيار
New	**Ctrl + N**	عمل ملف جديد داخل ماثيماتيكا
Open / Import	**Ctrl + O**	فتح ملف سبق تخزينه بواسطة برنامج ماثيماتيكا
Close	**Ctrl + F4**	إغلاق الملف المفتوح
Save	**Ctrl + S**	حفظ الملف تحت اسمه السابق
Print	**Ctrl + P**	طباعة الملف على جهاز الطباعة

وفى نهاية القائمة العمودية الخاصة بالاختيار File تظهر أسماء آخر أربعة ملفات سبق التعامل معها حيث يتم فتح آي منها بمجرد الضغط على أسم الملف المطلوب. وعند التعامل مع بعض الخيارات بالقوائم العمودية تظهر صناديق حوارية يطلق عليها dialog boxes وتحتوى هذه الصناديق على رسائل أو خيارات من ضمنها

خيار موافق 

وخيار إلغاء الأمر 

فمثلا عند الضغط بمؤشر الفارة على الخيار Open من القائمة العمودية File يظهر صندوق حوارى مثل الموجود بالشكل (٩)



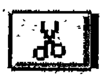
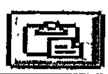
شكل (٩)

وبعد تحديد أسم الملف المطلوب فتحه من الخيار File Name ومكان وجوده على القرص من الخيار Drives ثم الضغط بمؤشر الفارة على موافق OK يتم فتح الملف المطلوب . وعن طريق الاختيار Help من صف القائمة الرئيسية يمكن التعرف على شرح وافى لمحتويات برنامج ماثيماتيكا .

والصف الثالث من أعلى عبارة عن شريط رمادى اللـــون وهـــو قائمـــة الأدوات Tool bar الموضحة



وتحتوى قائمة الأدوات على الكثير من الرموز مثل

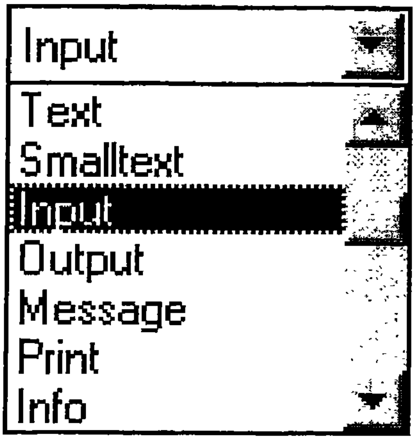
الرمز	الوظيفة التى يقوم بها
	فتح وثيقة جديدة New
	فتح ملف قديم Open
	حفظ الملف Save
	طباعة الملف Print
	القص Cut
	النسخ Copy
	اللصق Paste
	تنفيذ الأمر Insert

وهذه الرموز تساعد المستخدم فى التعامل مع ماثيماتيكا وتنفيذ المهام بسرعة .



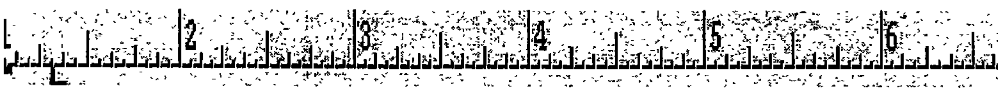
وفي بداية قائمة الأدوات من اليسار يوجد الاختيار

وبالضغط على السهم  تفتح القائمة العمودية الآتية

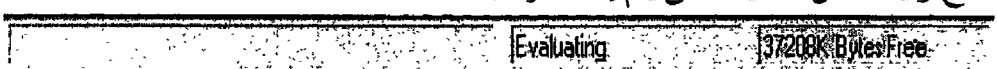


وعن طريق هذه القائمة يمكن التحكم في شكل ومواصفات البيانات المدخلة أو البيانات الناتجة .

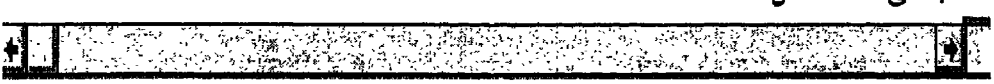
والصف الرابع يوجد في نهاية الجزء العلوى وهو شريط رمادى اللون وبه مسطرة ،



والجزء السفلى من الشاشة عبارة عن شريط رمادى اللون يسمى شريط الحالة **Status bar** ويحتوى على بعض البيانات التى تخبرنا عن حالة ماثيماتيكا كل لحظة من حيث حجم الذاكرة المتاح وبيانات عن العمليات التى يتم إدخالها وتنفيذها



وأعلى هذا الشريط وفي الجانب الأيمن من الشاشة توجد شرائط التصفح أو شرائط التمرير وعن طريق المؤشرات الموجودة بها يمكن رؤية المزيد من المعلومات على الواجهة والتى قد تحجب فى أثناء العمل ،



أما المساحة البيضاء المحصورة بين الجزء العلوى والجزء السفلى فى الواجهة فإنها تمثل منطقة العمل ويتم فيها كتابة الأوامر والعمليات المطلوب تنفيذها بنفس الطريقة التـى نكتـب بهـا فـى أي برنامج معالج كلمات **Word Processing** فمثلا

- لمسح حرف على يسار المؤشر نضغط على مفتاح **Backspace**
- لمسح حرف على يمين المؤشر نضغط على مفتاح **Del**
- للانتقال الى سطر جديد نضغط على المفتاح **Enter**

ويمكن الاستفادة من مزايا العمل تحت نظام النوافذ **Windows** مثل ميزة

- النسخ **Copy**
- القص **Cut**
- اللصق **Paste**

فمثلا عندما نريد تنفيذ عملية تم كتابتها من قبل فإنه يمكن الذهاب أليها بالمؤشـــر وتظليلهـــا بالفارة ثم الذهاب بالمؤشر الى الاختيار **Edit** فى صف القائمة الرئيسية والضغط علــى الأمــر **Copy** لعمل نسخة من الجزء المظلل (أو بالضغط بمؤشر الفارة مباشرة على الرمـــز  أو بالضغط على المفتاح **Ctr** والمفتاح **V** معا من لوحة المفاتيح) وبعد ذلك نذهب بالمؤشـــر الى المكان المطلوب لصق النسخة فيه ثم نضغط على الأمــر **Paste** مــن الاختيــار **Edit** (أو بالضغط بمؤشر الفارة مباشرة على الرمز  أو بالضغط على المفتاح **Ctr** والمفتاح **X** معا من لوحة المفاتيح) وبعد الحصول على النسخة المطلوبة يتم تنفيذهـــا أو عمـــل التعديـــلات المطلوبة بها قبل التنفيذ مما يوفر الوقت . ولإرسال أي أمر لتنفيذه بعد كتابتـــه نضغـــط علـــى مفتاح التنفيذ **Insert** (أو بالضغط بمؤشر الفارة مباشرة على الرمز ) .

مفتاح التنفيذ Insert يمثل مفتاح التنفيذ لأى أمر من أوامر ماثيماتيكا بينما مفتاح الإدخال Enter يستخدم فى ماثيماتيكا للانتقال الى سطر جديد

وخلال دراستنا عندما نذكر جملة أرسل الأمر فهذا يعنى كتابة الأمر بعد ظهور المحـــث الخـــاص بماثيماتيكا وتنفيذه عن طريق الضغط على مفتاح التنفيذ **Insert** .

٣ . الحصول على معلومات من ماثيماتيكا
Getting Information from Mathematica

فى كثير من الأحيان نحتاج الى التعرف على المعلومات الخاصة بالأوامر والدوال المختلفة فى ماثيماتيكا والتعرف على الصيغة العامة وكيفية كتابة كل من هذه الأوامر وماثيماتيكا يقدم لنا ذلك عن طريق رمز علامة الاستفهام ? فعندما ندخل الأمر

? Name

حيث Name يمثل أسم الأمر أو الدالة المطلوب الاستعلام عنها وبمجرد الضغط على مفتاح التنفيذ تظهر الصيغة العامة وجميع المعلومات الخاصة بالأمر Name ويراعى أن يكون الحرف الأول فقط من أسم الأمر أو الدالة مكتوب بالحروف الكبيرة **Capital** وإذا كان أسم الأمر يحتوى على كلمتين أو اكثر فإن كل كلمة فى الأمر تبدأ بحرف كبير ، فمثلا لمعرفة الصيغة العامة للدالة **Log** يرسل الأمر

? Log

وبمجرد الضغط على مفتاح التنفيذ يظهر الأتي

Log[z]   gives the natural logarithm of z (logarithm to base E)

Log[b, z]   gives the logarithm of z to base b.

آي أن الأمر **Log[z]** يقوم بحساب قيمة اللوغاريتم الطبيعى للعدد z للأساس e

والأمر فى الصيغة **Log[b, z]** يقوم بحساب قيمة اللوغاريتم للعدد z للأساس b

ولمعرفة الصيغة العامة لأمر الرسم **Plot** يرسل الأمر **?Plot**

وبمجرد الضغط على مفتاح التنفيذ يظهر الآتي

Plot[f, {x, xmin, xmax}] generates a plot of f as a function of x from xmin to xmax.

Plot[{f1, f2, ...}, {x, xmin, xmax}] plots several functions fi.

آي أن الأمر Plot[f, {x, xmin, xmax}] يقوم برسم الدالة f(x) فى النطاق من x = xmin الى x = xmax

والأمر فـــي الصيغـــة Plot[{f1, f2,...}, {x, xmin, xmax}] يقـــوم برســـم مجموعـــة الدوال ... f1, f2,

فى النطاق من x = xmin الى x = xmax

وللتعرف على معلومات إضافية عن أمر الرسم Plot مثل التعرف على الخيارات التى يمكـــن أضافتها إلى الرسم يرسل الأمر

?? Plot

وبمجرد الضغط على مفتاح التنفيذ يظهر الآتي

Plot[f, {x, xmin, xmax}] generates a plot of f as afunction of x from xmin to xmax. Plot[{f1, f2, ...}, {x, xmin, xmax}] plots several functions fi.

Attributes[Plot] = {HoldAll, Protected}
Options[Plot] =
{AspectRatio -> GoldenRatio^(-1), Axes -> Automatic, AxesLabel -> None,
AxesOrigin->Automatic,AxesStyle->Automatic,Background->Automatic,
ColorOutput -> Automatic,Compiled -> True, DefaultColor -> Automatic,
Epilog-> {},Frame-> False,FrameLabel-> None,FrameStyle-> Automatic,
FrameTicks -> Automatic, GridLines -> None, MaxBend -> 10.,
PlotDivision -> 20., PlotLabel -> None, PlotPoints -> 25,
PlotRange -> Automatic,PlotRegion -> Automatic, PlotStyle -> Automatic,
Prolog -> {}, RotateLabel -> True, Ticks -> Automatic,
DefaultFont :> $DefaultFont, Display Function:> $DisplayFunction}

ونلاحظ وجود قائمة كبيرة من الخيارات التى تستخدم مع أمر الرسم Plot سوف نتعــــرف عليها بالتفصيل فى الباب الخامس (ماثيماتيكا ورسم الدوال) .

وللتعرف على جميع الأوامر والدوال التى تبدأ بحرف A يرسل الأمر

?A*

وبمجرد الضغط على مفتاح التنفيذ يظهر الآتي

Abort	**Append**	**AbortProtect**	**AppendTo**
Above	**Apply**	**Abs**	**ArcCos**
AbsoluteDashing	**ArcCosh**	**AbsolutePointSize**	**ArcCot**
AbsoluteThickness	**ArcCoth**	**AbsoluteTime**	**ArcCsc**
CcountingForm	**ArcCsch**	**Accumulate**	**ArcSec**
Accuracy	**ArcSech**	**AccuracyGoal**	**ArcSin**
AddTo	**ArcSinh**	**AiryAi**	**ArcTan**
AiryAiPrime	**ArcTanh**	**AiryBi**	**Arg**
AiryBiPrime	**AlgebraicRules**	**Array**	**AspectRatio**
Alias	**AtomQ**	**All**	**Attributes**
Alternatives	**Automatic**	**AmbientLight**	**Auxiliary**
Analytic	**Axes**	**AnchoredSearch**	**AxesEdge**
And	**AxesLabel**	**Apart**	**AxesOrigin**
ApartSquareFree	**AxesStyle**		
ArithmeticGeometricMean			
AlgebraicRulesData			

حيث يظهر بيان بجميع الأوامر والدوال الموجودة فى برنامج ماثيماتيكا.والتى تبــــدأ بحــرف A وقد استخدمنا الرمز * ليحل مكان أي عدد من الحروف يكتب بعد الحــــرف A ويمكــن الاستعلام عن أي من هذه الأوامر أو الدوال كما ســـبق وذكرنا ، ومــن ذلــك نــرى أنــه بواسطة الرمز ? يمكن التعرف على شرح وافى لجميع الأوامر والدوال فى ماثيماتيكا. ويوجـــد رمز آخر هو علامة النسبة المئوية % من خلاله يتيح لماثيماتيكا إمكانية أجراء عمليات علــــى ناتج أخرجه من قبل .

مثال توضيحى

-- إذا أدخلنا إلى ماثيماتيكا عملية مثل 5+3 فإن الناتج يكون 8

-- وإذا أر دنا إجراء عملية على هذا الناتج مثل طـــرح 2 منه فإننـــا نشــير الى هـــذا الناتج بعلامة النسبة المئوية % وبالتالى بدلاً من كتابة 2-8 يكتب 2-% فيخرج لنا الناتج 6

-- وإذا أر دنا أجراء عملية أخرى على نفس الناتج الأول 8 بقســمته على 4 فإننا نشــير إلى الناتج 8 بعلامتى نسبة مئوية %% لان الناتج 8 يسبق هذه العملية بعمليتين كمـــا يلى 4/ %% فيخرج لنا الناتج 2 .

> ولما كان ماثيماتيكا يرقم لنا كل من مدخلا ته ومخرجاته ترقيم تصـــاعدى فان هناك طريقة اسهل خاصة إذا كان المطلوب أجراء عملية على نـــاتج أخرجه ماثيماتيكا قبل العملية الحالية بعدد كبير من العمليات وفى هـــذه الحالة توضع علامة النسبة المئوية يليها رقم ذلك الناتج حســب الـــترقيم المعطى من ماثيماتيكا

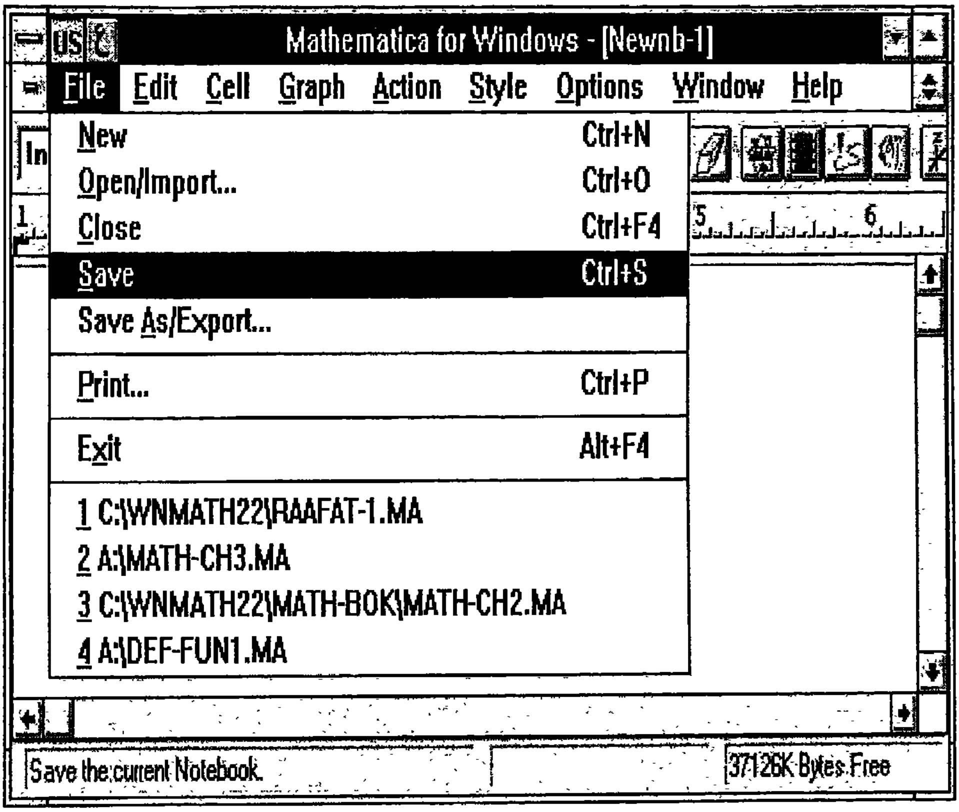
ولتوضيح ذلك

-- إذا كان 8 فى المثال السابق هو ناتج العملية رقم 40 (Out[40]) وأردنا طرح 2 منها فإننا نكتب

% 40 - 2

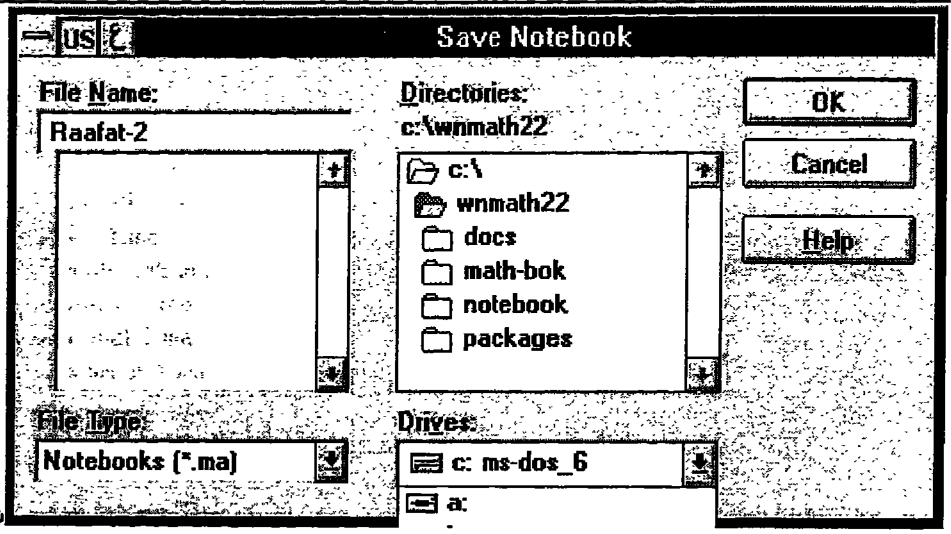
فيخرج لنا الناتج 6 .

ويقوم برنامج ماثيماتيكا بتسجيل كل ما يكتب وينفذ من أوامر في ملف يسمى دفتر notebook وفي نهاية العملية يقوم المستخدم user بحفظ هذا الدفتر في ملف تحت أسم يختاره المستخدم ويتكون اصل الاسم root name من حرف الى ثمانية حروف ويقوم ماثيماتيكا بوضع الاسم الممتد extension الخاص به وهو ma ويتم الحفظ عن طريق الضغط بمؤشر الفارة على **File** في شريط القائمة الرئيسية في أعلى الواجهة فتظهر قائمة عمودية مثل الموضحة في شكل (١٠) .



شكل (١٠)

وبالضغط بمؤشر الفارة على الأمر **Save** تظهر نافذة أخرى كما في الشكل (١١)



شكل (١١)

وبعد كتابة أســــم الملف نقوم باختيار المكان الذى ســـيحفظ فيه على القرص الصلب C أو أقراص مرنـــة A , B ويتم ذلك بالضغط بمؤشر الفارة على الرمز

Drives:

وفى الشكل (١١)

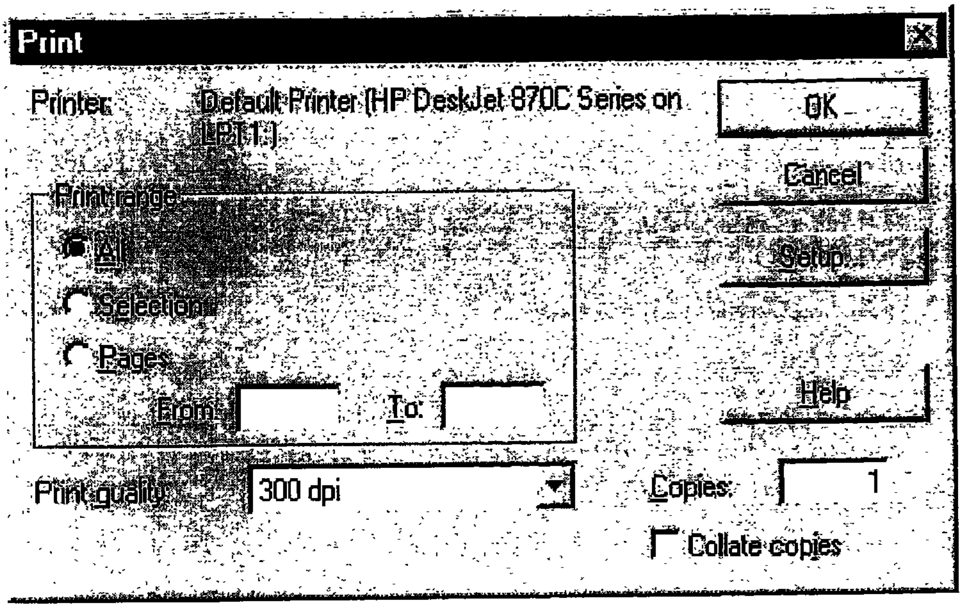
- تم تسمية الملف باسم **Raafat-2.ma**
- وتم تخزينه على القرص الصلب C داخل الفهرس المفتوح **wnmath22**

وبالضغط على موافق **OK** يتم التخزين •

وأثناء التعامل مع الملف المفتوح **Raafat-2.ma** يمكن تكرار تخزينه ويتم ذلك بـــالضغط مباشرة على الاختيار **Save** وفى هذه الحالة يتم التخزين مباشرة دون ظهور النافذة الخاصة بالأمر **Save** ويمكن عمل ذلك مباشرة بالضغط بمؤشر الفارة على الرمز  الموجـــود فى قائمة الأدوات ويمكن حفظ الملف تحت أسم آخر وذلك بالضغط على الاختيار **Save As** .

ولطباعة الملف على الورق نضغط بالفارة على الخيـــار **Print** مـــن القائمـــة العمودية

File) أو بالضغط مباشرة على الرمز  من قائمة الأدوات) فيظهر صندوق حوارى كما فى الشكل (١٢)



شكل (١٢)

وبواســـــطة مؤشر الفارة يتم الانتقال الى الخيارات الفرعية داخل الصندوق الحوارى

لتحديد عدد النسخ المطلوبة 

ولتحديد الصفحات المطلوب طباعتها على الورق 

وتتم الطباعة على الورق بالضغط على موافق 

وبنفس الطريقة يمكن التحول الى آي قائمة فى صف القائمة الرئيسية وتنفيذ كل ما فيهـــا مـــن مهام .

ومن المميزات الهامة فى برنامج ماثيماتيكا انه بالإضافة الى الدوال الكثيرة الموجودة فى قلب ماثيماتيكا والتى تشمل العديد من فروع الرياضيات فإنه يمكن للمستخدم تعريف الـــــدوال الخاصة به وذلك لان ماثيماتيكا يستخدم كلغة برمجة وكذلـــك توجـــد حـــزم **packages** لموضوعات متخصصة فى الرياضيات وكل حزمة تحتوى على تعريفات رياضية لدوال متخصصة فى فرع دقيق من الرياضيات فمثلا توجد حزم متخصصة فى كل من الفروع الآتية :

Algebra	الجبر
Calculus	حساب التفاضل والتكامل
Geometry	الهندسة
Linear Algebra	الجبر الخطى
Number Theory	نظرية الأعداد
Numerical Analysis	والتحليل العددى
Vector Analysis	تحليل المتجهات
Statistics	الإحصاء
Linear Programming	البرمجة الخطية
Fourier Transforms	تحويلات فورير
Laplace Transforms	تحويلات لابلاس

ويتم استدعاء الحزمة عن طريق إرسال الأمر **<< PackageName**

حيث **PackageName** تمثل أسم الحزمة المطلوب استدعائها .

٤ . التعبيرات فى ماثيماتيكا
Mathematica and Expressions

برنامج ماثيماتيكا يتعامل مع أنـــواع عديدة ومختلفة من الأشياء مثل الصيغ الرياضية **mathematical formulas** والقوائم **lists** والرسوم **graphs** وعلى الرغم مـــن أن هذه الأشياء غالبا ما تبدو مختلفة لكن ماثيماتيكا يتعامل معها جميعا بشكل قياسى فى صـــورة تعبيرات **expressions** فمثلا **f[x]** يمثل تعبير فى ماثيماتيكا لتعريف دالـــة **f(x)** هـــذه الدالة لها الاسم **f** وذات متغير واحد **x** كذلك **g[x,y]** تمثل دالة **g(x,y)** لهـــا الاســـم **g** وذات متغيرين **x , y** . أيضا العملية الحسابية **x + y** تمثل تعبير فى ماثيماتيكا حيث يقوم القلب فى ماثيماتيكا بتحويله الى الشكل القياسى **Plus[x,y]** والدالة **Plus** تمثل أســـم دالة الجمع وعند طباعة الناتج مرة أخرى على الواجهة الأمامية يكتـــب بـــالصورة **x + y** وبالمثل المؤثرات الأخرى مثل الضرب والقسمة والرفع الى أس كل منها له شكل قياســـى .

X + y + z	Plus[x,y,z]
x y	Times[x,y]
x^n	Power[x,n]
{x,y,z}	List[x,y,z]
a->b	Rule[a,b]
a=b	Set[a,b]

بعض الأمثلة لتعبيرات فى ماثيماتيكا

وفي الحقيقة فإن كل شئ يتم كتابته فى الواجهة الأمامية لبرنامج ماثيماتيكا يعامل كتعبير له أسم يطلق عليه رأس التعبير **Head** وهذا الاسم قد يمثل

- عملية **Operation** مثل الجمع أو الطرح **Plus** ، الضرب أو القسمة **Times**
- بناء **Structure** مثل القائمة **List**

ويأخذ الاسم معامل **argument** أو اكثر **Name[arguments]** ويجب ملاحظة أن معاملات جميع الدوال فى ماثيماتيكا توضع داخل أقواس مربعة من النوع [ ] .

للاستعلام عن أسم التعبير يستخدم الأمر **Head**

للاستعلام عن الشكل القياسى أو البناء الكامل للتعبير يستخدم الأمر **FullForm**

وفى الجدول الآتي نضع بعض الأمثلة لاستخدام الأمر **Head** والأمر **FullForm**

عند تطبيق الدالة **Head** على العملية **x+y+z** فان الناتج يكون **Plus**	In[1]:=Head[x+y+z] Out[1]:Plus
عند تطبيق الدالة **FullForm** على العملية **x+y+z** فان الناتج يكون **Plus[x,y,z]**	In[2]:= FullForm[x+y+z] Out[2]=Plus[x,y,z]
عند تطبيق الدالة **Head** على العملية **x*y** فان الناتج يكون **Times**	In[3]:= Head[x*y] Out[3]=Times
عند تطبيق الدالة **Head** على العملية **x*y+z** والتى تشمل ضرب **x*y** ثم الجمع الى **z** فان الناتج يكون **Plus** والذى يمثل عنوان العملية النهائية	In[4]:= Head[x*y+z] Out[4]=Plus
عند تطبيق الدالة **FullForm** على العملية **x*y+y** فان الناتج يكون **Plus[Times[x, y], z]**	In[5]:= FullForm[x*y+z] Out[5]=Plus[Times[x, y], z]
عند تطبيق الدالة **FullForm** على العملية **4+5x^2** فان الناتج يكون **Plus[4,Times[5,Power[x,2]]]**	In[6]:=FullForm[4+5x^2] Out[6]=Plus[4,Times[5,Power[x,2]

إذا كان التعبير يحتوى على أجزاء متعددة ومتداخلة فيمكن التعــرف علــى البنـــاء الشـــجرى **Tree Structure** باستخدام الأمر **Tree Form**

```
In[7]:=TreeForm[x^3+(1+x)^2]
Out[7]=
      Plus[  |          ,   |              ]
           Power[x, 3]   Power[  |      , 2]
                             Plus[1, x]
```

وعند تطبيق الدالة **Head** على عدد صحيح **Integer** أو عدد نسبى **Rational** أو عـــدد مركب **Complex** فإن الناتج يمثل نوع العدد ،

عند تطبيق الدالة **Head** على العدد 25 فإن الناتج يكون عبارة صحيح **Integer** والتى تفيد نوع العدد المستخدم

In[8]:Head[25]

Out[8]:=Integer

عند تطبيق الدالة **Head** على العدد $\frac{3}{4}$ فإن الناتج يكون عدد نسبى **Rational**

In[9]:Head[3/4]

Out[9]:= Rational

عند تطبيق الدالة **Head** على العدد 2.4 فإن الناتج يكون عدد حقيقى **Real**

In[10]:Head[2.4]

Out[10]:=Real

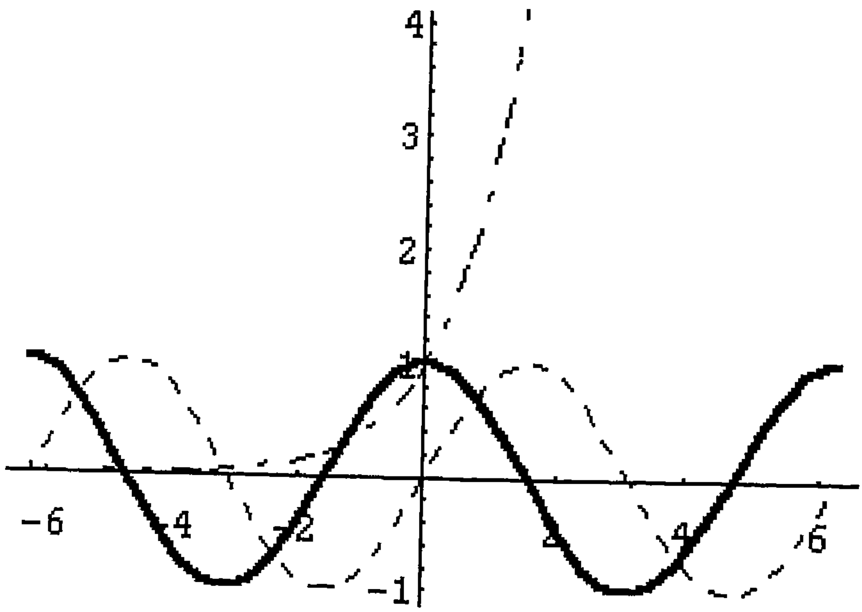
عند تطبيق الدالة **Head** على العدد 3+4I فإن الناتج يكون عدد مركب **Complex**

In[11]:Head[3+4I]

Out[11]:=Complex

الباب الثانى

ماثيماتيكا والدوال العددية



فى هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكا والخاصة بالموضوعات الآتية :

١ . الحسابات العددية — **Numerical Calculations**
٢ . الأنظمة العددية — **Number Systems**
٣ . المتغيرات — **Variables**
٤ . بعض الدوال الرياضية — **Some Mathematical Functions**
٥ . الأعداد المركبة — **Complex Numbers**

الباب الثانى

ماثيماتيكا والدوال العددية

برنامج ماثيماتيكا يحتوى على العديد من الدوال العددية وكما علمنا فإن ماثيماتيكا يتيح للمستخدم الاستعلام عن كافة الأوامر والدوال باستخدام الرمز ? لذلك يمكن استخدام هـــذا الرمز للاستعلام عن جميع أوامر ودوال ماثيماتيكا لنتعرف على الصيغة العامة لكـــل مـــن هـــذه الأوامر وسوف نعطى أمثلة توضيحية لكل أمر من هذه الأوامر ٠

١ـ الحسابات العددية Numerical Calculations

فى ماثيماتيكا يوجد أربعة أنواع من الأعداد.وهى

– الأعداد الصحيحة	Integers
– الأعداد النسبية	Rational
– الأعداد الحقيقية	Real
– الأعداد المركبة	Complex

ويستخدم ماثيماتيكا رموز المؤثرات الحسابية المعروفة وهى

مؤثر الجمع	+
مؤثر الطرح	–
مؤثر الضرب	*
مؤثر القسمة	/
مؤثر الرفع الى أس	^

x^y	Power	الرفع إلى أس
x + y	Add	الجمع
x - y	Subtraction	الطرح
x y (or) x*y	Multiply	الضرب
x/y	Divide	القسمة

المؤثرات الحسابية فى ماثيماتيكا

ويمكن استخدام ماثيماتيكا كأداة لأجراء العمليات الحسابية تماما مثل الآلة الحاسبة **Calculator** .

حساب مجموع عدديين **In[1]:=3.5+6.823**

Out[1]= 10.323

حساب خارج قسمة عدديين **In[2]:=2.5/7.3**

ونلاحظ أن الناتج عدد فى الصورة العشرية **Out[2]= 0.342466**

عند إدخال هذه الكمية الحسابية نلاحظ أن الناتج **In[3]:= (7^2-25*3)/(23+5^4)+42**

عدد نسبى لأن الأعداد المستخدمة أعداد صحيحة **Out[3]=** $\frac{13595}{324}$

وعند عمل الحسابات على الآلة الحاسبة العادية فإن النتائج تكون الى دقة معينة ، مثلا عشرة أرقام عشرية ، ولكن مع ماثيماتيكا غالبا ما نحصل على نتائج مضبوطة **exact results** ،

فى ماثيماتيكا نحصل على قيمة مضبوطة للعدد 2^{100} على الرغم من أن الناتج يحتوى على 31 رقم

In[4]:=2^100
Out[4]=1267650600228229401496703205376

وفي ماثيماتيكا يمكن الحصول على ناتج عددى تقريبى للكميات الحسـابية وذلـك باسـتخدام الأمر N كما يمكن الحصول على النتائج مقربة الى أي درجة دقة مطلوبة كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
N[expr] or expr//N	للحصول على قيمة عددية للتعبير expr
N[expr,n]	للحصول على قيمة عددية للتعبير expr مقربة الى n من الأرقام العشـرية
Rationalize[x]	للحصول على عدد نسبى Rational تقريبى للعدد x
Precision[x]	لمعرفة عدد الخانات العشرية decimal digits فى العدد x
Accuracy[x]	لمعرفة عدد الخانات المعنوية Significant digits على يمين العلامة العشرية فى العدد x

للحصول على قيمة عددية تقريبية للعدد 2^{100}

In[5]:=2^100//N
Out[5]= 1.26765 10^{30}

للحصول على 2^{100} مقربا الى 15 من الأرقام العشرية

In[6]:= N[2^100,15]
Out[6]= 1.26765060022823 10^{30}

للحصول على قيمة عددية تقريبية للكمية الحسابية المدخلة فى جملة الإدخال In[3]

```
In[7]:= N[%3]
Out[7]: 41.9599
```

ويمكن عمل ذلك بطريقة أخرى كما يلى

```
In[8] := (7^2-25*3)/(23+5^4)+42//N
Out[8]= 41.9599
```

وللحصول على الناتج من العملية الحسابية مقربا الى 20 رقم عشرى

```
In[9]:= N[(7^2-25*3)/(23+5^4)+42,20]
Out[9]= 41.959876543209876543
```

وللحصول على الناتج السابق فى صورة عدد نسبى تقريبى

In[10]:=Rationalize[%]

Out[10]= $\frac{13595}{324}$

لمعرفة عدد الخانات العشرية فى العدد الناتج من جملة الإدخال In[9]

```
In[11] := Precision[%9]
Out[11]= 20
```

لمعرفة عدد الخانات المعنوية على يمين العلامة العشرية فى العدد الناتج من جملة الإدخال In[9]

```
In[12] := Accuracy[%9]
Out[12]= 18
```

٢ . الأنظمة العددية Number Systems

النظام العشرى Decimal System يعتبر أقدم نظام عددى عرفه الإنسان فقد ابتكره القدماء المصريين منذ حوالى 3400 سنة قبل الميلاد وهو من اشهر الأنظمة العددية وأكثرها انتشارا ، والأرقام المستخدمة فى النظام العشرى هى 9 , 8 , 7 , 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 , 0 وعددها عشرة أرقام لذلك فإن أساس Base النظام العشرى يساوى 10 ، ومع ظهور الحاسبات الآلية ظهرت الحاجة الى استخدام أنظمة عددية أخرى وفى الجدول الأتى نوضح بعض الأنظمة العددية وأساس كل نظام والأرقام المستخدمة فيه .

النظام العددى	أساس النظام Base	الأرقام المستخدمة
النظام الثنائى Binary System	2	0 , 1
النظام الثمانى Octal System	8	0,1,2,3,4,5,6,7
النظام السداسى عشرى Hexadecimal System	16	0,1,2,3,4,5,6,7, 8,9,a,b,c,d,e,f

وفى برنامج ماثيماتيكا يمكن تحويل الأعداد الصحيحة أو الكسرية بين الأنظمة العددية المختلفة , وإذا كان أساس النظام الذى يتم التعامل معه اكبر من 10 فإنه يتم استخدام الحروف الأبجدية من a الى z حيث a تمثل 10 , b تمثل 11 , c تمثل 12 وهكذا ، ويتم التحويل بين الأنظمة العددية المختلفة كالآتي :

لتحويل العدد nnnnn من النظام ذو الأساس b الى النظام العشرى	b^^nnnnn
لتحويل العدد x من النظام العشرى الى النظام ذو الأساس b والناتج يحتوى على أساس النظام المحول أليه	BaseForm[x,b]

لتحويل العدد $(101101)_2$ من النظام الثنائى الى النظام العشرى

```
In[1]:=2^^101101
Out[1]=45
```

لتحويل العدد 45 من النظام العشرى الى النظام الثنائى

```
In[2]:=BaseForm[45,2]
Out[2]=101101  2
```

لتحويل العدد $(a3bf)_{16}$ من النظام السداسى عشرى الى النظام العشرى

```
In[3]:= 16^^a3bf
Out[3]= 41919
```

لتحويل العدد $(bf3)_{16}$ من النظام السداسى عشرى الى النظام الثنائى

```
In[4]:=BaseForm[16^^bf3,2]
Out[4]=101111110011 2
```

لتحويل العدد $(bf3)_{16}$ من النظام السداسى عشرى الى النظام الثمانى

In[5]:=BaseForm[16^^bf3,8]

Out[5]= 5763_8

لتحويل العدد الكسرى $(10111.1101)_2$ من النظام الثنائى الى النظام العشرى

In[6]:=2^^10111.1101

Out[6]= 23.8

لتحويل العدد الحقيقى $\sqrt{2}$ من النظام العشرى الى النظام الثنائى

In[7]:=BaseForm[N[Sqrt[2]],2]

Out[7]= 1.0110101000001001111_2

وفى ماثيماتيكا يمكن أجراء العمليات الحسابية المعروفة من جمع وطرح وضرب وقسمة على الأعداد فى الأنظمة العددية المختلفة .

حساب مجموع عددين فى النظام الثنائى والناتج يكون فى النظام العشرى

In[8]:=2^^1101001+2^^101111

Out[8]=152

حساب مجموع عددين فى النظام الثنائى والناتج يكون فى النظام الثنائى

In[9]:=BaseForm[2^^1101001+2^^101111,2]

Out[9]= 10011000_2

حساب حاصل طرح عددين في النظام الثنائي والناتج في النظام الثنائي

```
In[10]:=BaseForm[2^^11011.1011-2^^101111.1001,2]
Out[10]=-10011.111 2
```

حساب مجموع عددين في النظام الثماني والناتج يكون في النظام الثماني

```
In[11]:=BaseForm[8^^36.72+8^^74.02,8]
Out[11]=132.74 8
```

حساب مجموع عددين في النظام السداسي عشري

```
In[12]:=BaseForm[16^^af5.e6-16^^fe.9ab,16]
Out[12]=9f7.4b 16
```

حساب حاصل ضرب عددين في النظام الثنائي والناتج يكون في النظام العشري

```
In[13]:=2^^101 2^^110
Out[13]=30
```

حساب خارج قسمة عددين في النظام الثنائي

```
In[14]:=BaseForm[2^^11011.101/2^^110.011,2]
Out[14]=100.010101010101011 2
```

حساب خارج قسمة عددين في النظام السداسي عشري

```
In[15]:=BaseForm[16^^af6.ec4/16^^ec.fa3,16]
Out[15]=b.d83e 16
```

٣ . المتغيرات Variables

عند عمل الحسابات فى ماثيماتيكا يكون من المفيد دائما إعطاء أسماء للقيم العددية أو للكميات الحسابية الناتجة ويتم ذلك بإدخال أسماء متغيرات **variables** هذه القيم أو للكميات الحسابية .

لوضع القيمة **value** داخل المتغير **x**	**x=value**
لوضع القيمة **value** لكل من المتغيرات **x,y**	**x=y=value**
لحذف اى قيمة تم إحلالها من قبل للمتغير **x**	**x=.**

وعند اختيار أسماء للمتغيرات داخل ماثيماتيكا يجب مراعاة الأتى :

- فى أسماء المتغيرات لا يوجد اى قيود على عدد الحروف أو الأرقام المستخدمة فى أسم المتغير ويجب عدم استخدام العلامات الخاصة (+ , / , ^ , ...) فى أسم المتغير .
- أسم المتغير لا يبداء بعدد فمثلا **2x** تمثل حاصل الضرب **2*x** بينما **x2** تمثل أسم لمتغير .
- فى ماثيماتيكا يمكن استخدام الحروف الكبيرة والصغيرة **upper and lower-case letters** فى أسماء المتغيرات ولكن يجب ان يبداء أسم المتغير بحرف ابجدى صغير **lower-case letter** حتى لا يحدث تداخل بين أسماء المتغيرات التى نقوم بتعريفها وبين أسماء المتغيرات أو الدوال المعرفة داخل بناء ماثيماتيكا **built-in** .
- داخل العمل فى ماثيماتيكا فإن أسم المتغير يحتفظ بالقيمة التى يتم إحلالها داخله حتى يقوم المستخدم بتغيرها أو حذفها فمثلا إذا وضعنا x=5 فإن ماثيماتيكا يفترض انك تريد دائما للمتغير x أن يكون له القيمة 5 داخل الدفتر **notebook** الذى نتعامل معه ألا إذا قمت بتغيرها أو حذفها .

لجعل المتغير x له القيمة 5 يكتب x=5

```
In[1]:=x=5
Out[1]=x=5
```

وعند ظهور x فى أي عملية بعد ذلك سوف تستبدل بالقيمة 5

```
In[2]:=x^2
Out[2]=25
```

عند إعطاء قيمة جديدة للمتغير x فإنه يتم إلغاء القيمة السابقة والتعامل مع القيمة الجديدة .

```
In[3]:=x=7
Out[3]=x=7
```

عند حساب x^2 يتم التعامل مع القيمة الجديدة للمتغير x

```
In[4]:=x^2
Out[4]=49
```

يمكن إلغاء القيـــمة المخزنة فى المتغير x باستخدام المؤثر .=

```
In[5]:= x=.
```

وعند الاستعلام عن قيمة x يتم طبـــــاعة x بدون قيمة

```
In[6]=x
Out[6]=x
```

وفى ماثيماتيكا يمكن كتابة اكثر من عمليـــــة رياضية على سطر واحد بجملة إدخــــال واحدة بشرط أن يفصــــل كل عملية عن الأخرى بالفاصلة المنقوطة (;) وفى هذه الحالــــة فإن ناتج التنفيذ يعطى ناتج آخر عملية تم إدخالها فى السطر أما إذا انتهى سطر الإدخال بالفاصلة المنقوطة (;) فهذا يعنى رغبة المستخدم فى عدم ظهور الناتج .

إدخال اكثر من عملية رياضية على سطر واحد في جملة إدخال واحدة ونلاحظ أن ناتج التنفيذ يكون ناتج آخر عملية مدخلة في السطر

```
In[7]:=a=2;b=3;c=a+b;d=a b c
Out[7]=30
```

في حالة أنتها السطر بالفاصلة المنقوطة ; فإنه لا تظهر جملة الناتج

```
In[8]:=a=2;b=3;c=a+b;d=a b c;
```

ونعرض الآن بعض الملاحظات التي يجب مراعاتها عنداستخدام المتغيرات في ماثيماتيكا

x y تعنى حاصل ضرب المتغير x في المتغير y أي أن وجود مسافة بين المتغيرين يعنى أجراء عملية الضرب

xy تعنى متغير له الاسم xy

5x تعنى حاصل ضرب 5 فى المتغير x أي أنه يمكن الأستغناء عن المسافة أو علامة الضرب * بين عدد ومتغير بشرط أن يكون العدد أولا

x5 تعنى متغير له الاسم x5

x^2y تعنى $x^2 y$ وليس x^{2y}

وفى لغات الحاسب المعروفة مثل لغة الفورتران FORTRAN أو لغة السي C فإنه يجب على المستخدم الإعلان Declaration عن أسماء المتغيرات قبل استخدامها فمثلا إذا كتبنـــا فى برنامج فورتران جملة مثل x=5 وكان المتغير x لم يتم الإعلان عنه فى بداية البرنامج فـــإن

مترجم لغة الفورتران يرفض ترجمة البرنامج ويعطى رسالة تفيد بوجود متغير لم يتم الإعلان عنه ، ولكن فى برنامج ماثيماتيكا يختلف الوضع تماما حيث لا يطلب ماثيماتيكا الإعلان عن المتغيرات التى نستخدمها داخل العمل فى دفتر معين notebook وانما يقوم ماثيماتيكا بحفظ أسماء المتغيرات التى تدخل اليه مستخدما فى ذلك نظام السياقات Context الذى يشبه نظام الفهارس المستخدم فى نظام التشغيل DOS وهذا يعنى انه يمكن وضع كل مجموعة من المتغيرات فى سياق معين وهذا النظام يتيح للمستخدم إعادة استخدام أسماء المتغيرات فى السياقات المختلفة وذلك لان الأسم الكامل لاي متغير هو الأسم الذى نعطيه له بالإضافة الى أسم السياق الذى نضعه فيه وهذا يتيح للمستخدم الحرية والسهولة فى التعامل مع المتغيرات داخل ماثيماتيكا دون الإعلان عنها ، ومن اهم السياقات فى ماثيماتيكا السياق `Global وهو السياق الفعال عند تشغيل البرنامج ويضع فيه ماثيماتيكا كل المتغيرات التى نقوم بتعريفها ما لم ننص على وضعها فى سياق آخر , والسياق `System ويضع فيه ماثيماتيكا كل الأوامر والدوال الموجودة فيه built-in , ولكن يجب على المستخدم مراعاة حذف قيم المتغيرات التى تم الانتهاء من التعامل معها فى سياق معين حتى لا يحدث خطاء فى استخدام قيم لا نريدها للمتغيرات .

وضع القيمة 8 فى المتغير x

```
In[9]:=x=8;
```

للاستعلام عن التعريف الذى يحتفظ به ماثيماتيكا للمتغير x ومعرفة السياق الموجود به المتغير x

```
In[10]:=?x
Global`x
x=8
```

وبالإضافة الى المؤثرات الحسابية توجد المؤثرات العلاقية Relational Operators والتى تربط متغيرات أو تعبيرات رياضية ويكون الناتج كمية منطقية صواب True أو خطأ False .

المؤثر العلاقى	العمل الذى يقوم به المؤثر العلاقى
x=y	إحلال قيمة y داخل المتغير x
x= =y	اختبار ما إذا كان x يساوى y
x>y	اختبار ما إذا كان x اكبر من y
x>=y	اختبار ما إذا كان x اكبر من أو يســاوى y
x<y	اختبار ما إذا كان x اقل من y
x<=y	اختبار ما إذا كان x اقل من أو يســاوى y
x!=y	اختبار ما إذا كان x لا تســاوى y

إحلال القيم 6,8,3 الى المتغيرات x , y , z على الترتيب ثم اختبار ما إذا كان x > y – z ونلاحظ ان الناتج يكون الكمية المنطقية True

```
In[11]:=x=6;y=8;z=3;x>y-z
Out[11]= True
```

اختبار ما إذا كان x اكبر من أو يساوى y ونلاحظ ان الناتج يكون الكمية المنطقية False

```
In[12]:=x>=y
Out[12]= False
```

كذلك يوجد نوع آخر من المؤثرات هو المؤثـــرات المنطقيـــــة **Logical Operations** والتى تربط كميات منطقية **p , q** ويكون الناتج كمية منطقيـــة صـــواب **True** أو خطـــأ **False** .

المؤثر العلاقى	العمل الذى يقوم به المؤثر العلاقى
!p	Not p
p&&q	p and q
$p \parallel q$	p or q

ومن المعلوم ان جدول الصواب والخطأ للمؤثرات العلاقية يكون فى الصورة

p	q	! p	p&&q	$p \parallel q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	F

إحلال القيم 4,7,5 الى المتغيرات a , b , c على الترتيب

In[13]:= a=4;b=7;c=5;

اختبار ما إذا كان b>=a+c and a<c ونلاحظ ان الناتج يكون الكمية المنطقية False

In[14]:=b>=a+c&&a<c

Out[14]= False

اختبار ما إذا كان b>=a+c or a<c ونلاحظ ان الناتج يكون الكمية المنطقية True

In[15]:=b>=a+c || a<c

Out[15]= True

٤ . بعض الدوال الرياضيـــة
Some Mathematical Functions

يوجد داخل بناء ماثيماتيكا اكثر من **1000** دالة معرفة الى جانب العديد مـــن الـــدوال المعرفة فى حزم خارجية **External Packages** وهذه الدوال لها أسماء داخل ماثيماتيكـــا وفقا للقواعد الآتية :

– يتكون أسم الدالة من الكلمات الإنجليزية الكاملة لأسم الدالة أو الأختصار الرياضى لأســم الدالة .

– الحرف الأول من كل كلمة **word** فى أسم الدالة يكتب كبـــير **Capital** وبـــاقى حروف الكلمة يكتب صغير **lower-case letter** .

– إذا انتهى أسم الدالة بالحرف **Q** فهذا يعنى ان الدالة تمثل سؤال منطقى وتكـــون الإجابـــة صواب **True** أو خطأ **False** .

ونتعرف الآن على بعض الدوال العددية الموجودة فى ماثيماتيكا ووظيفة كل منها ،

الدالة الرياضيـــة	الدالة فى ماثيماتيكــا
دالة الجذر التربيعى $\sqrt{x}$	Sqrt[x]
الدالة الآسية e^{x}	Exp[x]
دالة اللوغاريتم للأساس الطبيعى $\log_e x$	Log[x]
دالة اللوغاريتم للأساس b $\log_b x$	Log[b,x]
الدوال المثــلثـيـة Trigonometric Functions حيث x مقاسه بالتقدير الدائرى	Sin[x] , Cos[x] , Tan[x] Csc[x] , Sec[x] , Cot[x]
الدوال المثــلثـيـة العكسية Inverse Trigonometric Functions	ArcSin[x], ArcCos[x], ArcTan[x] ArcCsc[x] , ArcSec[x] , ArcCot[x]
الدوال الزائـــديـــة Hyperbolic Functions	Sinh[x] , Cosh[x] , Tanh[x] Csch[x] , Sech[x] , Coth[x]
الدوال الزائـــديـــة العكسـيـة Inverse Hyperbolic Functions	ArcSinh[x], ArcCosh[x], ArcTanh[x] ArcCsch[x], ArcSech[x], ArcCoth[x]
القيمة المطلقة $\|x\|$	Abs[x]
إيجاد اكبر عدد من الأعداد x1 , x2 , ...	Max[x1,x2,...]
إيجاد اصغر عدد من الأعداد x1 , x2 , ...	Min[x1,x2,...]

حساب قيمة عددية للجذر التربيعى $\sqrt{3}$

```
In[1]:=Sqrt[3]//N
Out[1]=1.73205
```

حساب قيمة $e^{2.5}$

```
In[2]:=Exp[2.5]
Out[2]=12.1825
```

حساب قيمة $\log_2 256$

```
In[3]:=Log[2,]
Out[3]=8
```

حساب قيمة عددية لدالة الجيب $\sin(2)$

```
In[4]:=Sin[2]//N
Out[4]=0.909297
```

حساب قيمة دالة جيب التمام العكسية $\cos^{-1}(.5)$

```
In[5]:=ArcCos[.5]
Out[5]=1.0472
```

لحساب قيمة عددية لدالة الجيب الزائدية sinh(4)

```
In[6]:=Sinh[4]//N
Out[6]=27.2899
```

لحساب القيمة المطلقة $|-5|$

```
In[7]:=Abs[-5]
Out[7]=5
```

لحساب العدد الأكبر من قائمة الأعداد {9,4,-6,3,8,12}

```
In[8]:=Max[9,4,-6,3,8,12]
Out[8]=12
```

لحساب العدد الأصغر من قائمة الأعداد {9,4,-6,3,8,12}

```
In[9]:=Min[9,4,-6,3,8,12]
Out[9]= -6
```

وفي ماثيماتيكا يوجد بعض الثوابت الرياضية Mathematical Constants لها أسماء معينة

I	$i = \sqrt{-1}$
Infinity	∞
Pi	$\pi \cong 3.14159$
Degree	$\pi / 180$
E	$e \cong 2.71828$
GoldenRatio	$(1+\sqrt{5})/2 \cong 1.61803$

لحساب القيمة العددية للثابت π مرفوع للأس **2**

In[10]:=N[Pi^2]

Out[10]= 9.8696

لحساب قيمة $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

In[11]:=Sin[Pi/2]

Out[11]=1

لحساب قيمة $\cos(60^{o})$ حيث الزاوية مقاسه بالتقدير الستينى

In[12]:=Cos[60 Degree]//N

Out[12]=0.5

لحساب قيمة e^{2}

In[13]:=E^2//N

Out[13]=7.3890

الصيغة العامة للدالة فى ماثيماتيكا	الوظيفة التى تقوم بها الدالة
Round[x]	للحصول على اقرب عدد صحيح من x
Floor[x]	للحصول على اكبر عدد صحيح اقل من أو يساوى x
Ceiling[x]	للحصول على اصغر عدد صحيح اكبر من أو يساوى x.

والجدول الآتي يوضح عمل هذه الدوال عند تطبيقها على بعض الأعداد

X	Round[x]	Floor[x]	Ceiling[x]
2.4	2	2	3
2.5	2	2	3
2.6	3	2	3
-2.4	-2	-3	-2
-2.5	-2	-3	-2
-2.6	-3	-3	-2

الصيغة العامة للدالة فى ماثيماتيكا	الوظيفة التى تقوم بها الدالة
Mod[m, n]	إيجاد باقى خارج القسمة $\frac{m}{n}$ (m modulo n)
Quotient[m,n]	إيجاد الجزء الصحيح من خارج القسمة $\frac{m}{n}$
GCD[n1,n2,...]	إيجاد القاسم المشترك الأعلى Greatest Common Divisor للأعداد n1 , n2 , ...
LCM[n1,n2,...]	إيجاد المضاعف المشترك الأدنى Least Common Multiple للأعداد n1 , n2 , ...
Divisors[n]	إيجاد قائمة بالأعداد الصحيحة التى تقسم العدد n
Prime[k]	إيجاد العدد الأولى رقم k
PrimeQ[n]	إذا كان العدد n عدد أولى فإن الناتج يكون صواب True وخلاف ذلك يكون الناتج خطاء False

حساب باقى قسمة 17 على 3

```
In[14]:=Mod[17,3]
Out[14]=2
```

حساب الجزء الصحيح من خارج قسمة 17 على 3

```
In[15]:=Quotient[17,3]
Out[15]=5
```

حساب القاسم المشترك الأعلى للأعداد 24 ,16 , 12
وهو يمثل اكبر عدد صحيح يقسم العددين

```
In[16]:=GCD[12,16,24]
Out[16]=4
```

حساب المضاعف المشترك الأدنى
للأعداد 24 , 16 , 12

```
In[17]:=LCM[12,16,24]
Out[17]=48
```

عمل قائمة تحتوى على قواسم
العدد 24

```
In[18]:=Divisors[24]
Out[18]={1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24}
```

الحصول على العدد الأولى رقم 100

```
In[19]:=Prime[100]
Out[19]=541
```

اختبار ما إذا كان العدد 81 عدد أولى

```
In[20]:=PrimeQ[81]
Out[20]=False
```

الصيغة العامة للدالة في ماثيماتيكا	الوظيفة التي تقوم بها الدالة
n!	حساب دالة مضروب **n**
Binomial[n, m]	معامل ذات الحدين $\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$
Sign[x]	تحديد إشارة **x** وتكون **+1** إذا كان **x >** **0** أو **0** إذا كان **x=0** أو **-1** إذا كان **x < 0**
Random[]	للحصول على عدد عشوائي محصور بين **1 , 0**
Random[type, range]	للحصول على عدد عشوائي من النوع **type** وفي المدى **range**، والنوع **type** قد يكون حقيقي **Real** أو صحيح **Integer** أو مركب **Complex** والمدى **range** يكون بالصورة **{min , max}**
Random[type, range,n]	للحصول على عدد عشوائي من النوع **type** وفي المدى **range** وبدقة **n** من الأرقام العشرية

حساب قيمة مضروب 30

```
In[21]:=30!
Out[21]=265252859812191058636308480000000
```

حساب قيمة عددية تقريبية لمضروب 30

```
In[22]=30!//N
```

Out[22]=$2.65253\ 10^{32}$

حساب قيمة معامل ذات الحدين $\binom{8}{3}=\frac{8!}{3!\,5!}$

```
In[23]:=Binomial[8,3]
Out[23]=56
```

للحصول على عدد عشوائي محصور بين 1,0

```
In[24]:=Random[]
Out[24]=0.440108
```

للحصول على عدد صحيح عشوائي
محصور بين 50 , 10

```
In[25]:=Random[Integer,{10,50}]
Out[25]=32
```

للحصول على عدد حقيقي عشوائي محصور
بين 20 , 2.5 وبدقة 15 رقم عشرى

```
In[26]:=Random[Real,{2.5,20},15]
Out[26]=7.57929458180578
```

٥ . الأعداد المركبة Complex Numbers

في ماثيماتيكا يمكن التعامل مع الأعداد المركبة التى على الصورة x + I y حيث I يمثل المقدار التخيلى $\sqrt{-1}$ وفيما يأتى نعرض بعض العمليات على الأعداد المركبة

العدد المركب x + iy	x + I y
الجزء الحقيقى من العدد المركب z	Re[z]
الجزء التخيلى من العدد المركب z	Im[z]
العدد المرافق للعدد المركب z	Conjugate[z]
القيمة المطلقة للعدد المركب z	Abs[z]
سعة العدد المركب z حيث $z = \|z\| e^{i \arg(z)}$	Arg[z]

بعض العمليات على الأعداد المركبة

ويقوم ماثيماتيكا بأجراء العمليات الجبرية على الأعداد المركبة من جمع وطرح وضرب وقسمة وكذلك يمكن حساب قيمة الجذر التربيعى والدوال الآسية واللوغاريتمية والمثلثية والزائدية في حالة الأعداد المركبة .

حساب الجزر التربيعى للعدد التخيلى 4-

والناتج هو العدد التخيلى 2I

In[1]:=Sqrt[-4]

Out[1]=2I

حساب القيمة العددية للجذر التربيعى للعدد المركب 3+2I

In[2]:=Sqrt[3+2I]//N

Out[2]= 1.81735 + 0.550251 I

حساب القيمة العددية للدالة الآسية المركبة e^{2+7I}

In[3]:=Exp[2+7I]//N

Out[3]=5.57063 + 4.85451 I

حساب قيمة log(-2)

ونلاحظ أن الناتج يكون عدد مركب

In[4]:=Log[-2]

Out[4]:=I Pi + Log[2]

ولحساب القيمة العددية للمقدار المركب log(-2)

-In[5]:=Log[

2]//N

Out[5]=0.693147 + 3.14159 I

حساب القيمة العددية للدالة اللوغاريتمية المركبة log(3+4I)

In[6]:=Log[3+4I]//N

Out[6]=1.60944 + 0.927295 I

لحساب القيمة المطلقة للعدد المركب 2 + 3 I

In[7]:=Abs[2+3I]

Out[7]= Sqrt[13]

وحساب القيمة العددية لدالة القيمة المطلقة $|2 + 3\ I|$

```
In[8]:=Abs[2+3I]//N
Out[8]=3.60555
```

لتعريف الأعداد المركبة z1 , z2

```
In[9]:=z1=3+5I;z2=4-6I;
```

لحساب مجموع العددان المركبان z1 + z2

```
In[10]:=z1+z2
Out[10]=7 - I
```

لحساب حاصل ضرب العددان المركبان z1 x z2

```
In[11]:=z1 z2
Out[11]=42 + 2 I
```

لحساب خارج قسمة العددان المركبان $\frac{z\ 1}{z\ 2}$

In[12]:=z1/z2

Out[12]= $-\frac{9}{26}+\frac{19}{26}\ I$

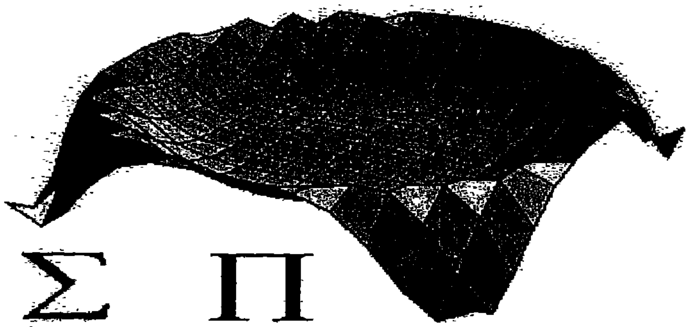
لحساب قيمة عددية لخارج قسمة العددان المركبان

```
In[13]:=z1/z2//N
Out[13]=-0.346154 + 0.730769 I
```

لحساب سعة العدد المركب z1

```
In[14]:=Arg[z1]//N
Out[14]=1.03038
```

الباب الثالث
ماثيماتيكا والجبر



فى هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكا والخاصة بالموضوعات الآتية :

١ . كثيرات الحدود والدوال الكسرية Polynomials & Rational Functions

٢ . المتسلسلات Series

٣ . حل المعادلات Solving Equations

٤ . الجبر الخطى Linear Algebra

أولا : القوائم Lists
ثانيا : المصفوفات Matrices
ثالثا : حل الأنظمة الخطية Solving Linear Systems
رابعا : القيم المميزة والمتجهات المميزة Eigenvalues and Eigenvectors

الباب الثالث

ماثيماتيكا والجبر

من الأشياء الهامة فى برنامج ماثيماتيكا هو المقدرة على القيام بالحسابات على المقـــادير الرمزية **Symbolic** الى جانب المقادير العددية **Numeric** وهذا يعنى أن ماثيماتيكا يســـتطيع التعامل مع الصيغ والمقادير الجبرية تماما مثل التعامل مع الأعداد .

١ ـ كثيرات الحدود والدوال الكسرية
Polynomials and Rational Functions

برنامج ماثيماتيكا يقدم عدد كبير من الأوامر للتحويل بين الأشكال المختلفـــة للتعبـــيرات الجبرية وأجراء العمليات الجبرية على كثيرات الحدود **Polynomials** وسوف نتعرف فيما يأتي على بعض هذه الأوامر مع توضيح الوظيفة والصيغة العامة لكل من هذه الأوامر ونعطـــى أمثلة توضيحية .

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
Factor[poly]	تحليل كثيرة الحدود **Poly** الى قوى صحيحة
Expand[expr]	إيجاد مفكوك حاصل الضرب والقوى الصحيحة الموجبة الموجودة فى البسط للتعبير **expr**
ExpandAl[expr]	إيجاد مفكوك حاصل الضرب والقوى الصحيحة الموجبة الموجودة فى كل أجزاء التعبير **expr**
Together[expr]	توحيد المقامات **denominators** للكسور الموجودة فى التعبير **expr**
Apart[expr]	كتابة التعبير الكسرى **expr** على صورة مجموع لكسوره الجزئية
Simplify[expr]	إيجاد صورة مبسطة للتعبير **expr** بأصغر عدد ممكن من الأجزاء
Collect[expr,x]	تجميع الحدود التى تحتوى على نفس قوى **x** فى التعبير **expr**

لتحليل كثيرة الحدود x^2+2x-3 إلى عواملها

```
In[1]:=Factor[x^2+2x-3]
Out[1]= (x+3)(x-1)
```

الأمر **Expand** هو عكس الأمر **Factor** ويقوم بفك الأقواس

```
In[2]:=Expand[%]
```

Out[2]= x^2+2x-3

لتحليل كثيرة الحدود $8x^3+36x^2+54x+27$ إلى عواملها

```
In[3]:=Factor[8x^3+36x^2+54x+27]
```

Out[3]= $(3+2x)^3$

تعريف المقدار الجبرى **rrr** ثم إيجاد مفكوك القوى الصحيحة الموجبة وكذلك حاصل الضرب الموجود فى البسط للمقدار الجبرى **rrr**

```
In[4]:=rrr=(x-1)^2 (x+2)/((x+1)(x-3)^2);Expand[rrr]
```

Out[4]= $\frac{2}{(-3+x)^2(1+x)}-\frac{3x}{(-3+x)^2(1+x)}+\frac{x^3}{(-3+x)^2(1+x)}$

توحيد المقامات للكسور الموجودة في المقدار الجبرى الناتج من جملة الإخراج السابقة

In[5]:=Together[%]

$$\text{Out[5]: } \frac{2-3x+x^3}{(-3+x)^2(1+x)}$$

إيجاد مفكوك القوى الصحيحة الموجبة وكذلك حاصل الضرب الموجود في كل المقدار الجبرى rrr

In[6]:=ExpandAll[rrr]

$$\text{Out[6]= } \frac{2}{9+3x-5x\text{^}2+x\text{^}3}-\frac{3x}{9+3x-5x\text{^}2+x\text{^}3}+\frac{x^3}{9+3x-5x\text{^}2+x\text{^}3}$$

كتابة المقدار الجبرى rrr في صورة كسوره الجزئية

In[7]:=Apart[rrr]

$$\text{Out[7]= } 1+\frac{5}{(-3+x)^2}+\frac{19}{4(-3+x)}+\frac{1}{4(1+x)}$$

تبسيط شكل الناتج من جملة الإخراج السابقة Out[7]

In[8]:=Simplify[%7]

$$\text{Out[8]= } \frac{(-1+x)^2(2+x)}{9+3x-5x\text{^}2+x\text{^}3}$$

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
Collect[expr, x]	تجميع الحدود التى تحتوى على نفس قـوى x فـى التعبير expr
Coefficient[expr, form]	الحصول على معامل form فى كثيرة الحـــدود expr
Length[expr]	الحصول على عدد العناصر الموجودة فـى التعبـير expr
Exponent[expr,form]	الحصول على اكبر قوى للمقدار form فى التعبير expr

In[9]:=r1=Expand[(2x+y+1)^2]

إيجاد مفكوك المقدار الجبرى $(2x + y + 1)^2$ ووضع الناتج فى المتغير r1

Out[9]= $1 + 4 x + 4 x^2 + 2 y + 4 x y + y^2$

In[10]:=Collect[r1,y]

تجميع الحدود التى تحتوى على نفس قوى المتغير y فى التعبير الجبرى rl

Out[10]= $1 + 4 x + 4 x^2 + (2 + 4 x) y + y^2$

In[11]:=Coefficient[r1,y]

للحصول على معامل y فى التعبير الجبرى rl

Out[11]=$2 + 4 x$

In[12]:=Exponent[r1,y]

للحصول على أكبر قوى للمتغير y فى التعبير الجبرى rl

Out[12]=2

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
الحصول على البسط فى التعبير expr	Numerator[expr]
الحصول على المقام فى التعبير expr	Denominator[expr]
إيجاد خارج قسمة p على q مع إهمال الجزء الباقى حيث p , q كثيرات حدود فى المتغير x	PolynomialQuotient[p, q, x]
إيجاد الجزء الباقى من خارج قسمة p علـــى q حيث p , q كثيرات حدود فى المتغير x	PolynomialRemainder[p, q, x]

للحصول على البسط فى التعبير الجبرى rrr

In[13]:=Numerator[rrr]

Out[13]=$(-1+x)^2$ (2+x)

للحصول على المقام فى التعبير الجبرى rrr

In[14]:=Denominator[rrr]

Out[14]=$(-3+x)^2$ (1+x)

تعريف كثيرتى حدود p,q ثم إيجاد خارج قسمة كثيرة الحدود p على كثيرة الحدود q مع إهمال الجزء الباقى

In[15]:= p=x^3+5x^2+4x-6;q=x+1;
PolynomialQuotient[p,q,x]

Out[15]=$4x^2$ +x

للحصول على الجزء الباقى من خارج قسمة كثيرة الحدود p على كثيرة الحدود q

In[16]:=PolynomialRemainder[p,q,x]

Out[16]= -6

٢ . المتسلسلات Series

فى كثير من المسائل الرياضية تنشأ عمليات جمع وضرب للحدود المنتظمة وبرنامج ماثيماتيكا قادر على حساب مثل هذه العمليات . ولحساب مجموع حدود المتسلسلة يستخدم الأمر **Sum** كالآتي :

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
حساب المجموع $\sum_{i=1}^{i\ max} f$	Sum[f, {i, imax}]
حساب المجموع $\sum_{i=i\ min}^{i\ max} f$	Sum[f, {i, imin, imax}]
حساب المجموع $\sum_{i} f$ من i=imin الى i=imax بخطوة مقدارها step	Sum[f, {i,imin, imax, step}]
حساب المجموع $\sum_{i=i\ min}^{i\ max} \sum_{j=j\ min}^{j\ max} f$	Sum[f, {i, imin, imax}, {j,jmin, jmax}, . . .]

لحساب مجموع العشرة حدود الأولى من المتسلسلة $\sum_{i=1}^{10} \frac{1}{i^2}$

```
In[1]:= Sum[1/i^2,{i,1,10}]//N

Out[1]=1.54977
```

ويمكن حســـــاب مجموع عدد لانهائي من المتسلسلة بشرط أن تكون المتسلسلة تقاربية

```
In[2]:= Sum[i/I^2,{i,1,Infinity}]//N
Out[2]= 1.64493
```

لحساب المجموع $\sum_{i=1}^{7}\frac{x^i}{i!}$

```
In[3]:=Sum[x^i/i!,{i,1,7,2}
```

Out[3]= $x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}+\frac{x^7}{5040}$

لحساب مجموع $\sum\frac{x^i}{i!}$ من i=2 الى i=7 بخطوة step=2

```
In[4]:=Sum[x^i/i!,{i,1,7,2}]
```

Out[4]= $x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^7}{5040}$

لحساب المجموع المزدوج $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{i}x^i\,y^j$

```
In[5]:=Sum[x^i y^j,{i,1,3},{j,1,i}]
```

Out[5]= $xy+x^2y+x^2y^2+x^3y+x^3y^2+x^3y^3$

ويمكن لماثيماتيكا أجراء عمليات الضرب على الحدود المنتظمـــة باســتخدام الأمــر Product كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
Product[f,{i, imax}]	حساب حاصل الضرب $\prod_{i=1}^{imax} f$
Product[f,{i, imin, imax}]	حساب حاصل الضرب $\prod_{i=imin}^{imax} f$
Product[f,{i, imin, imax, step}]	حساب حاصل الضرب $\prod_{i=imin}^{imax} f$ بخطوة مقدارها step
Product[f,{i,imin, imax}, {j, jmin, jmax}, ...]	حساب حاصل الضرب المزدوج $\prod_{i=imin}^{imax} \prod_{j=jmin}^{jmax} f$

لحساب حاصل الضرب $\prod_{i=1}^{5} i^2$

In[6]:=Product[i^2,{i,1,5}]

Out[6]=14400

لحساب حاصل الضرب $\prod_{i=1}^{4} (x+i)$

In[7]:=Product[x+i,{i,1,4}]

Out[7]=(1 + x) (2 + x) (3 + x) (4 + x)

لحساب حاصل $\prod_{i=1}^{3} \prod_{j=1}^{i} (x+i)^j$

In[8]:=Product[(x+i)^j,{i,1,3},{j,1,i}]

Out[8]=$(1 + x)(2 + x)^3(3 + x)^6$

وبرنامج ماثيماتيكا قادر على حســـــاب مفكوك متسلسلة القوى للدالة $f(x)$ حول النقطة $x= x_0$ لأي عدد n من الحدود وكذلك حساب مفكوك تيلور لدالة فـــي متغـــيرين $f(x,y)$ حول النقطة (x_0,y_0) وذلك باستخدام الأمر **Series** كالآتي :

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
حساب مفكوك متسلســـلة القوى للدالة f حول النقطة x_0 حتى الحد $(x-x_0)^n$	Series[f, {x, x0, n}]
حساب مفكوك متسلسلة القوى للدالة f علـــى التتابع بالنسبة الى y ثم الى x	Series[f, {x, x0, nx}, {y,y0, ny}]
تحويل expr الى الشكل العادى بدون أي رموز خاصة	Normal[expr]

لحساب مفكوك متسلسلة القوى للدالة $f(x)$ حول النقطة $x=a$ حتى الحدود من الدرجـــــة الثالثة

In[9]:=Series[f[x],{x,a,3}]

Out[9]=

$$f[a]+f'[a](-a+x)+\frac{f''[a](-a+x)^2}{2}+\frac{f^{(3)}[a](-a+x)^3}{6}+O[-a+x]^4$$

لحساب مفكوك متسلسلة القوى للدالة e^x حول النقطة $x = 0$ حتى الحدود من الدرجة الرابعة

```
In[10]:=Series[Exp[x],{x,0,4}]
```

$$Out[10]=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+O[x]^5$$

ويمكن إلغاء الحد $O[x]^5$ وكتابة المفكوك فى الشكل العادى وذلك باستخدام الأمر **Normal**

```
In[11]:=Normal[%]
```

$$Out[11]= 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}$$

لحساب مفكوك متسلسلة القوى للدالة e^{xy} حول النقطة $x = 0 \;,\; y = 0$ حتى الحدود من الدرجة الثالثة فى x والدرجة الثانية فى y

```
In[12]:=Series[Exp[x y],{x,0,3},{y,0,2}]
```

$$Out[12]=1+(y+O[y]^3)x+(\frac{y^2}{2}+O[y]^3)x^2+O[x]^3$$

ويمكن كتابة المفكوك فى الشكل العادى وذلك باستخدام الأمر **Normal**

```
In[13]:=Normal[Series[Exp[x y],{x,0,3},{y,0,2}]]
```

$$Out[13]=1+xy+\frac{x^2y^2}{2}$$

٣ . حل المعادلات Solving Equations

فى برنامج ماثيماتيكا المعادلة يكون لها الشكل **lhs == rhs** حيث يستخدم المؤثـــر العلاقى == وهو يعنى اختبار ما إذا كان الطرف الأيمن **rhs** يساوى الطرف الأيســـر **lhs** ولذلك فإن المعادلات فى ماثيماتيكا تعامل على أنها تعبيرات منطقية **Logical Statement** .

فمثلا عند إدخال المعادلة 2+3==5 فإن الناتج يكون صواب **True**

In[1] := 2+3= =5
Out[1]= True

وعند إدخال المعادلة $x^2+3x==2$ فإن ماثيماتيكا يقوم بإخراج المعادلة فى صورة رمزية لأنه لم يستطع اختبار ما إذا كان $x^2+3x=2$ صواب أو خطأ نظرا لعـــدم وجـــود قيمـــة ســـابقة للمتغير x .

In[2] := x^2+3x= =2
Out[2]= $x^2+3x==2$

والآن لحل المعادلة والحصول على قيم x التى تمثل جذور المعادلة نســـتخدم الأمـــر **Roots** كالآتي :

Roots[lhs= =rhs,var] للحصول على قائمة تحتوى على جذور المعادلة **lhs= =rhs** بالنسبة للمتغير **var** .

الحصول على جذور المعادلة $x^2+3x==2$ ونلاحظ أن الناتج يكون على صورة تعبير منطقى

In[3]:=Roots[x^2+3x= =2,x]
Out[3]=

$$x=\frac{-3-Sqrt[17]}{2} \quad \| \quad x=\frac{-3+Sqrt[17]}{2}$$

وكثيرا ما نحتاج الى استخدام الحل الناتج فى حسابات أخرى لذلك يكون من المفيد تحويل الحل من التعبير المنطقى الى صورة صريحة ويتم ذلك باستخدام الدالة **ToRules**

ToRules[eqns]	لتحويل حل **eqns** الناتج من الأمر **Roots** من الصورة المنطقية الى متتابعة من القوائم تحتوى على قواعد صريحة للحل
{ToRules[eqns]}	لتحويل حل **eqns** الناتج من الأمر **Roots** من الصورة المنطقية الى قائمة تحتوى على قواعد صريحة للحل

In[4]:=ToRules[%3]
Out[4]=

لتحويل الحل الناتج من جملة 3 . الى متتابعة تحتوى على قواعد صريحة للحل

$$Sequence[\{x->\frac{-3 - Sqrt[17]}{2}\}, \{x->\frac{-3 + Sqrt[17]}{2}\}]$$

In[5]:={ToRules[Roots[x^2+3x= =2,x]]}// N
Out[5]={{x -> -3.56155}, {x -> 0.561553}}

ولتحويل الكسور الاعتيادية فى الحل إلى كسور عشرية والحصول على قيم عددية نستخدم الدالة N

ويمكن حل المعادلة والحصول على جذورها باستخدام الأمر Solve كالآتي :

حل المعادلة **eqn** بالنسبة للمتغير **var**	**Solve[eqn, var]**

وتعتبر معادلات كثيرات الحدود **polynomial equations** من أهم المعادلات التي يتم حلها باستخدام الأمر **Solve** .

للحصول على جذور المعادلة $x^2 + 3x = 2$ بالنسبة للمتغير x

In[6]:=Solve[x^2+3x= =2,x]

Out[6]= $\{x- > \frac{-3 - Sqrt[17]}{2}\},\{x- > \frac{-3 + Sqrt[17]}{2}\}$

لحساب قيمة عددية تقريبية للحل الناتج من جملة الإدخال رقم 6

In[7]:= N[%6]

Out[7]={{x -> -3.56155}, {x -> 0.561553}}

للحصول على جذور المعادلة $a\,x + b = c$ بالنسبة للمتغير x

In[8]:=Solve[a x+b= =c,x]

Out[8]= $\{\{x -> -(\frac{b-c}{a})\}\}$

للحصول على جذور المعادلة $a x^2 + b x + c = 0$ بالنسبة الى المتغير x

In[9]:=Solve[a x^2+b x+c==0,x]

$$\text{Out[9]=} \left\{\left\{x->\frac{-b-\text{Sqrt}[b^2-4ac]}{2a}\right\},\left\{x->\frac{-b+\text{Sqrt}[b^2-4ac]}{2a}\right\}\right\}$$

للحصول على جـــذور المعـــادلة $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$ بالنسبة الى المتغير x

In[10]:=Solve[x^3+3x^2+3x+2= =0,x]

$$\text{Out[10]=}\{\{x->-2\},\left\{x->\frac{-1-I\,\text{Sqrt}[3]}{2}\right\},\left\{x->\frac{-1+I\,\text{Sqrt}[3]}{2}\right\}\}$$

ولحساب قيمة عددية تقريبية للحل الناتج من جملة الإدخال رقم 10

In[11]:=N[%]
Out[11]={{x -> -2.}, {x -> -0.5 - 0.866025 I}, {x -> -0.5 + 0.866025 I}}

ويمكن الحصول على جذور معينة من حل المعادلة باستخدام الأقواس المزدوجة [[ ]]

للحصول على الجذر الأول من حل المعادلة $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$

In[12]:=Solve[x^3+3x^2+3x+2= =0,x][[1]]
Out[12]={x -> -2}

للحصول على قيمة عددية للجذر الثاني من حل المعادلة $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$

In[13]:=Solve[x^3+3x^2+3x+2= =0,x][[2]]//N
Out[13]={x -> -0.5 - 0.866025 I}

والأمر **Solve** قادر على إيجاد حلول جبرية صريحة للعديد من معادلات كثيرات الحدود ذات الدرجات العالية خاصة المعادلات التى يمكن تحليلها

تعريف كثيرة حدود من الدرجة الخامسة **In[14]:=equ1=Expand[Product[x-i,{i,5}]]**

Out[14]=-120 + 274 x - 225 x^2 + 85 x^3 - 15 x^4 + x^5

حل معادلة كثيرة حدود من الدرجة الخامسة **In[15]:=Solve[equ1= =0,x]**

Out[15]={{x -> 1}, {x -> 2}, {x -> 3}, {x -> 4}, {x -> 5}}

نلاحظ أننا حصلنا على حل صريح لمعادلة كثيرة الحدود **equ1=0** من الدرجة الخامسة . وإذا كان ماثيماتيكا قادر على إيجاد حلول معادلة كثيرة حدود من درجة **n** فإنه يعطى **n** من الجذور حتى فى حالة وجود جذور مكررة كما فى المثال الآتي :

In[16]:=Solve[(x+3)(x-1)^2= =0,x]
Out[16]={{x -> -3}, {x -> 1}, {x -> 1}}

وفى حالة عدم استطاعة ماثيماتيكا الحصول على حلول جبرية صريحة فإن ماثيماتيكا تترك المعادلة فى صورتها الرمزية ويمكن فى هذه الحالة استخدام الدالة **N** للحصول على حلول عددية

In[17]:=Solve[x^5-130x+11= =0,x]
Out[17]={ToRules[Roots[-130 x + x^5 == -11, x]]}

In[18]:= Solve[x^5-130x+11= =0,x]//N
Out[18]={{x -> -3.39748}, {x -> -0.0211456 - 3.37698 I},
{x -> -0.0211456 + 3.37698 I}, {x -> 0.0846154}, {x -> 3.35515}}

وفى ماثيماتيكا يمكن استخدام الأمر Solve لحل بعض المعادلات التى ليست على صورة كثيرات حدود

In[19]:=Solve[Sqrt[1-x]+Sqrt[1+x]= =4,x]//N
Out[19]={{x -> -6.9282 I}, {x -> 6.9282 I}}

وفى برنامج ماثيماتيكا يمكن استخدام الأمر Solve لحل مجموعة من المعادلات فى وقت واحد كالآتي :

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
حل مجموعة المعادلات eqns بالنسبة الى جميع المتغيرات الموجودة فيها حيث eqns تكتب فى صورة قائمة {lhs1= =rhs1,lhs2= =rhs2,...}	Solve[eqns]
حل مجموعة المعادلات eqns بالنسبة الى المتغيرات vars حيث vars تكتب فى صورة قائمة {x1,x2,...}	Solve[eqns,vars]
حل مجموعة المعادلات eqns بالنسبة الى المتغيرات vars فقط وحذف المتغيرات elims من النتائج	Solve[eqns, vars, elims]

لحل المعادلتين بالنسبة الى جميع المتغيرات الموجودة وهى x , y

In[20]:=Solve[{x+y= =1,x-3y= =2}]

Out[20]= $\{\{x->\frac{5}{4}, y->-\frac{1}{4}\}\}$

للحصول على قيمة عددية لحل المعادلتين بالنسبةإلى جميع المتغيرات

In[21]:=Solve[{x^2+y^2= =5,x+3y= =1}]//N

Out[21]={{x -> -2., y -> 1.}, {x -> 2.2, y -> -0.4}}

تعريف القائمة eqns1 وتحتوى على معادلتين فى ثلاث مجاهيل هم x , y , z ثم حساب الحل بالنسبة الى x , y فقط

In[22]:=eqns1={y-2x= =9,x+3z= =1}; Solve[eqns1,{x,y}]
Out[22]={{y -> 9 - 2 (-1 + 3 z), x -> 1 - 3 z}

حساب حل مجموعة المعادلات eqns1 بالنسبة الى y , z فقط

In[23]:=Solve[eqns1,{y,z}]

Out[23]={{y -> 9 + 2 x, z -> $\frac{1 - x}{3}$ }}

تعريف القائمة eqns2 وتحتوى على ثلاث معادلات فى خمسة مجاهيل هم x , y , z , w , t ثم حساب الحل بالنسبة الى المتغيرات x , y , z فقط

In[24]:=eqns2={x+2y= =z,y+2z= =w,z+2w= =t};
Solve[eqns2,{x,y,z}]

Out[24]={{x -> t - 2 w + 2 (-w - 2 (-t + 2 w)),
y -> w + 2 (-t + 2 w), z -> t - 2 w}}

حساب حل مجموعة المعادلات eqns1 بالنسبة الىالمتغير x مع حذف المتغير z

In[25]:=Solve[eqns1,{x},{z}]

Out[25]={{x− > $\frac{-9 + y}{2}$}}

حساب حل مجموعة eqns1 بالنسبة إلى المتغير y مع حذف المتغير z

In[26]:=Solve[eqns1,{y},{z}]

Out[26]={{y -> 9 + 2 x}}

حساب حل مجموعة المعادلات eqns2 بالنسبة إلى المتغير x مع حذف المتغيرات t,w

In[27]:=Solve[eqns2,{x},{t,w}]

Out[27]={{x -> -2 y + z}}

حساب حل مجموعة المعادلات eqns2 بالنسبة إلى المتغير w مع حذف المتغيرات x,y

In[28]:=Solve[eqns2,{w},{x,y}]

Out[28]= $\{\{w->\frac{t-z}{2}\}\}$

وفى برنامج ماثيماتيكا يمكن حذف عدد من المتغيرات من مجموعة المعادلات وإعـــادة كتابتهـــا ويتم ذلك باستخدام الأمر Eliminate كالآتي :

Eliminate[eqns,elims] حذف المتغيرات elims من مجموعة المعادلات eqns

حذف المتغير x من مجموعة المعادلات eqns1

In[29]:=Eliminate[eqns1,x]

Out[29]=y = = 11 - 6 z

حذف المتغير x من مجموعة المعادلات eqns1

In[30]:=Eliminate[eqns1,z]

Out[30]=y = = 9 + 2 x

حذف المتغيرات x,y من مجموعة المعادلات eqns2

In[31]:= Eliminate[eqns2,{x,y}]

Out[31]=t = = 2 w + z

حذف المتغيرات w,t من مجموعة المعادلات eqns2

In[32]:=Eliminate[eqns2,{w,t}]

Out[32]=x = = -2 y + z

٤ . الجبر الخطى Linear Algebra

يعتبر الجبر الخطى جزء اساسى وهام فى دراسة الرياضيات والهندسة والفيزياء وعلوم أخرى ، وبرنامج ماثيماتيكا يقدم العديد من الأوامر للعمليات الجبرية الخاصة بالتعامل مع القوائم **Lists** والمصفوفات **Matrices** وحلول الأنظمة الخطية **Linear Systems** وحساب القيم المميزة والمتجهات المميزة لمصفوفة .

أولا : القوائم Lists

من خلال دراستنا للعديد من الأوامر فى ماثيماتيكا مثل

Sum , Product , Series , ...

نلاحظ أن نطاق العمل فى هذه الأوامر يكتب باستخدام الأقواس { } على صورة قائمة **List** وتستخدم القوائم فى ماثيماتيكا بشكل كبير وبصفة خاصة عند عمل الحسابات عندما يكون هناك حاجة لتنظيم عدد كبير من القيم بغرض التعامل معها كوحدة واحدة ولذلك فإن ماثيماتيكا غنى بالعمليات التى يمكن تنفيذها على القوائم ، ولكى نتعرف على هذه العمليات نبدأ بتعريف قائمتين **s1 , s2** كل قائمة تحتوى على خمسة عناصر

```
In[1]:=s1= { a , b , c , d , e }; s2= { 2 , 3 , 4 , 5 , 6};
```

وتنفيذ العمليات الحسابية من جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة على قائمتين يتم على العناصر المتناظرة فى القائمتين بشرط أن يكون القائمتين بهما نفس العدد من العناصر ونواتج العملية الحسابية يكون قائمة جديدة .

جمع القائمتين **s1 , s2** يتم بجمع العناصر المتناظرة فى القائمتين

```
In[2]:= s1+s2
Out[2]={2 + a , 3 + b , 4 + c , 5 + d , 6 + e}
```

طرح القائمتين s1 , s2 يتم بطرح العناصر المتناظرة في القائمتين

```
In[3]:= s1-s2
Out[3]={-2 + a, -3 + b, -4 + c, -5 + d, -6 + e}
```

ضرب القائمتين s1 , s2 يتم بضرب العناصر المتناظرة فى القائمتين

```
In[4]:=s1 s2
Out[4]={2 a, 3 b, 4 c, 5 d, 6 e}
```

قسمة القائمتين s1 , s2 يتم بقسمة العناصر المتناظرة فى القائمتين

In[5]:=s1/ s2

Out[5]= $\{\frac{a}{2},\frac{b}{3},\frac{c}{4},\frac{d}{5},\frac{e}{6}\}$

ويمكن إجراء أي عملية حسابية بين قائمة وعدد ثابت فمثلا جمع القائمة s1 على العدد الثابت 2 يتم بإضافة العدد الثابت 2 الى كل عنصر فى القائمة

```
In[6]:= s1+2
Out[6]: {a+2 , b+2 , c+2 , d+2 , e+2}
```

ضرب القائمة s1 فى العدد الثابت 3 يتم بضرب العدد الثابت 3 فى كل عنصر من القائمة

```
In[7]:=3s1
Out[7]= {3 a, 3 b, 3 c, 3 d, 3 e}
```

ويمكن رفع القائمة الى أس عددى حيث يتم رفع كل عنصر فى القائمة الى هذا الأس العددى

```
In[8]:=s2^2
Out[8]={4,9,16,25,36}
```

ويمكن رفع أي قيمة عددية الى أس عبارة عن قائمة

In[9]:= 2^s1

Out[9]= $\{2^a, 2^b, 2^c, 2^d, 2^e\}$

ويمكن رفع قائمة الى أس عبارة عن قائمة أخرى

In[10]:=s1^s2

حيث يتم رفع كل عنصر فى القائمة الأساس الى أس يساوى العنصر المناظر له فى القائمة الأس

Out[10]= $\{a^2, b^3, c^4, d^5, e^6\}$

ويمكن تطبيق الدوال على القوائم حيث يتم تطبيق الدالة على كل عنصر فى القائمة

إيجاد الجذر التربيعى للقائمة s2 حيث يتم حساب الجذر التربيعى لكل عنصر فى القائمة

In[11]:=Sqrt[s2]//N
Out[11]= {1.41421, 1.73205, 2., 2.23607, 2.44949}

تطبيق دالة الجيب **sin** على القائمة **s2**

In[12]:=Sin[s2]//N
Out[12]={0.909297, 0.14112, -0.756802, -0.958924, -0.279415}

وماثيماتيكا قادر على أجراء عمليات الفئات Sets على القوائم من خلال العديد من الأوامر والجدول الآتي يوضح بعض الأوامر المستخدمة .

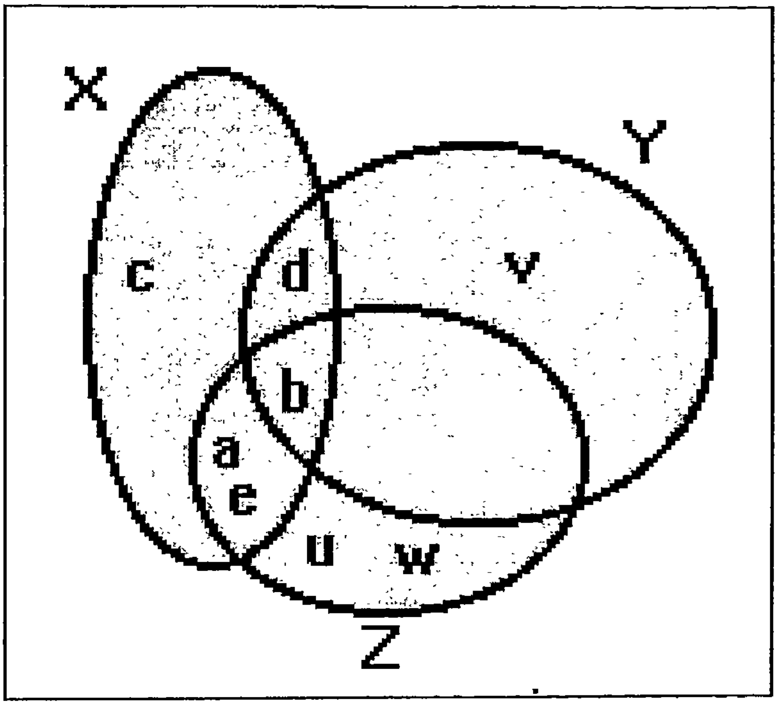
الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
Length[list]	إيجاد عدد العناصر فى القائمة **list**
Sort[list]	ترتيب عناصر القائمة **list** حيث يتم أولا ترتيب الأعداد تصاعديا ثم ترتيب الحروف أبجديا
Join[list1, list2, ...]	إضافة القوائم **list1 , list2, ...** على بعضها بحيث تحتوى القائمة الناتجة على عدد من العناصر يساوى مجموع أعداد العناصر فى كل قائمة
Union[list1, list2, ...]	اتحاد الفئات **list1 ⋃ list2 ⋃ list3 ⋃ ...** حيث يتم حذف العناصر المكررة فى القوائم
Intersection[list1, list2, ...]	تقاطع الفئات **list1 ⋂ list2 ⋂ list3 ⋂ ...**
Complement[eall, e1, e2, ...]	إيجاد مكملة الفئة **eall** بالنسبة للفئات **e1 , e2 , ...** أي إيجاد العناصر فى الفئة **eall** والغير موجودة فىالفئات **e1 , e2 , ...**
Partition[list, n]	تجزى القائمة **list** الى قوائم فرعية متباعدة كل منها يحتوى على **n** من العناصر

ولتوضيح أوامر الفئات نفرض القوائم X , Y , Z

In[13]:=X={a,b,c,d,e};Y={b,d,v};Z={a,b,e,u,w};

لمعرفة عدد العناصر فى X

In[14]:=Length[X]
Out[14]=5

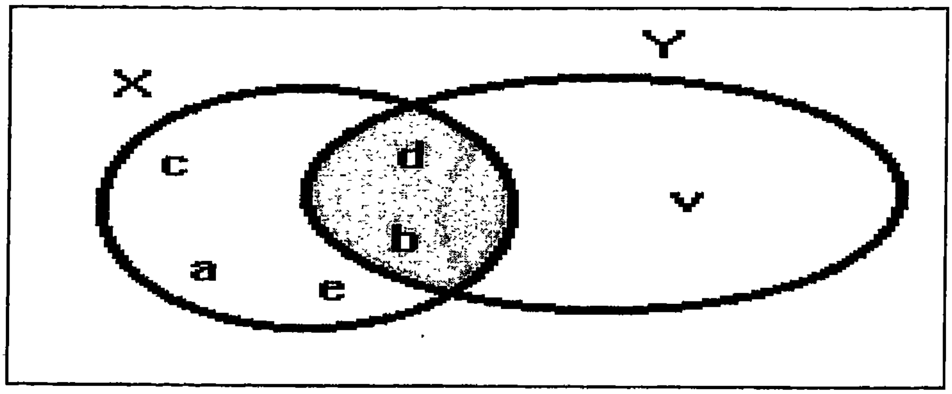


اضافة القوائم X , Y , Z معا بحيث تحتوى القائمة الناتجة على عدد من العناصر يساوى مجموع أعداد العناصر فى كل قائمة

In[15]:=Join[X,Y,Z]
Out[15]={a, b, c, d, e, b, d, v, a, b, e, u, w}

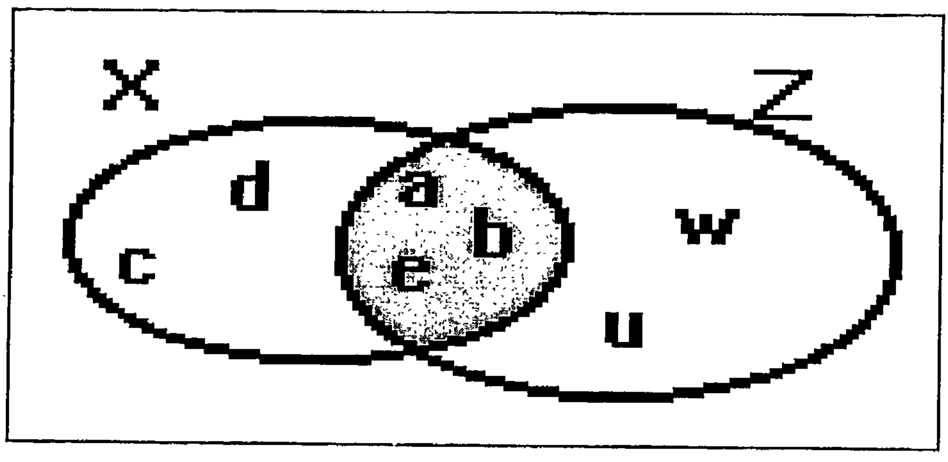
اتحاد الفئات $X \cup Y \cup Z$ حيث يتم حذف العناصر المكررة فى القوائم

In[16]:=Union[X,Y,Z]
Out[16]={a, b, c, d, e, u, v, w}



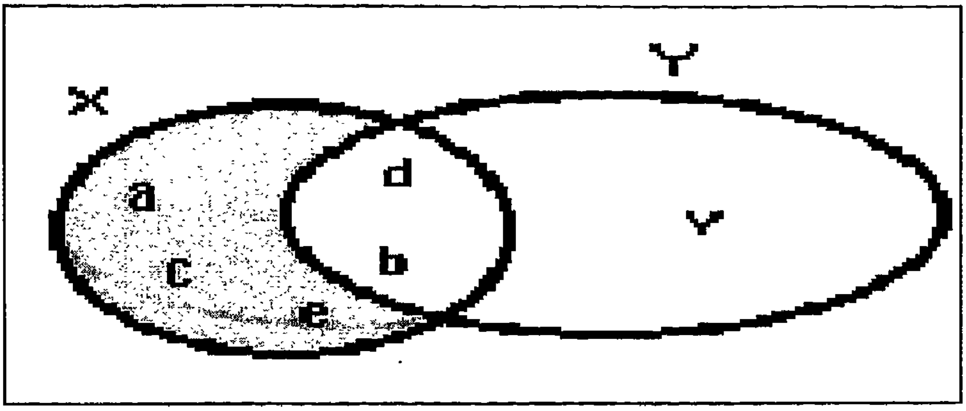
تقاطع الفئتان $X \cap Y$ وتمثل فئة العناصر المشتركة فى الفئتان X , Y

In[17]:=Intersection[X,Y]
Out[17]={b, d}



تقاطع الفئتان $X \cap Z$ وتمثل فئة العناصر المشتركة فى الفئتان X , Z

In[18]:=Intersection[X,Z]
Out[18]={a, b, e}



إيجاد مكملة الفئة X بالنسبة للفئة Y أي إيجاد العناصر فى الفئة X والغيرموجودة فىالفئة Y

In[19]:=Complement[X,Y]
Out[19]={a, c, e}

تجزئ الفئة Z الى قوائم فرعية كل منها يحتوى على عنصرين

In[20]:=Partition[Z,2]
Out[20]={{a, b}, {e, u}}

تجزئ الفئة Y الى قوائم فرعية كل منها يحتوى على عنصر واحد فقط

In[21]:=Partition[Y,1]
Out[21]={{b}, {d}, {v}}

ترتيب عناصر القائمة حيث يتم أولا ترتيب الأعـــداد تصاعديا ثم ترتيب الحروف أبجديا

In[22]:=Sort[{r,4,9,p,e,a,-7}]
Out[22]={-7, 4, 9, a, e, p, r}

ويمكن إضافة عناصر جديدة الى القوائم باستخدام الأوامر الآتية :

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
إضافة العنصر **elem** فى بداية القائمة **list**	**Prepend[list, elem]**
إضافة العنصر **elem** فى نهاية القائمة **list**	**Append[list, elem]**
إضافة العنصر **elem** الى القائمة **list** فى الموضع رقم **n**	**Insert[list, elem, n]**

تعريف القائمة **rrr**

In[23]:=rrr={a,b,c,d,e};

إضافة العنصر **x** فى بداية القائمة **rrr**

In[24]:=Prepend[rrr,x]
Out[24]={x, a, b, c, d, e}

إضافة العنصر **y** إلى نهاية القائمة **rrr**

In[25]:=Append[rrr,y]]
Out[25]={a, b, c, d, e, y}

إدخال العنصر **z** فى الموضع رقم **2** من القائمة **rrr**

In[26]:=Insert[rrr,z,2]
Out[26]={a, z, b, c, d, e}

ويمكن حذف عناصر من القوائم باستخدام الأمر Drop كالآتي :

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
حذف n من العناصر من بداية القائمة list	**Drop[list, n]**
حذف n من العناصر من نهاية القائمة list	**Drop[list, -n]**
حذف العنصر رقم n من القائمة list	**Drop[list,{n}]**
حذف عناصر من القائمة list ابتداء من العنصر رقم m الى العنصر رقم n	**Drop[list, {m, n}]**

حذف ثلاثة عناصر من بداية القائمة rl

```
In[27]:=r1={a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7};
        Drop[r1,3]
Out[27]={a4, a5, a6, a7}
```

حذف عنصران من نهاية القائمة rl

```
In[28]:=Drop[r1,-2]
Out[28]={a1, a2, a3, a4, a5}
```

حذف العنصر الرابع من القائمة rl

```
In[29]:=Drop[r1,{4}]
Out[29]={a1, a2, a3, a5, a6, a7}
```

حذف العناصر من العنصر الثالث الى العنصر السادس من القائمة rl

```
In[30]:=Drop[r1,{3,6}]
Out[30]={a1, a2, a7}
```

ويمكن تحديد عناصر معينة من القائمة وذلك باستخدام الأقواس المزدوجة [[ ]]

لتحديد العنصر الرابع من القائمة r1

```
In[31]:=r1[[4]]
Out[31]=a4
```

ولتحديد العنصران الرابع والسادس من القائمة r1

```
In[32]:=r1[[{4,6}]
Out[32]={a4, a6}
```

وفى برنامج ماثيماتيكا يمكن توليد قوائم بناء على مواصفات نحددها له وذلك باستخدام الأمر Table كالآتي :

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
Table[expr, {imax}]	عمل قائمة تحتوى على نسخ من expr عددها imax
Table[expr, {i, imax}]	عمل قائمة تحتوى على قيم expr ابتداء من i=1 حتى i=imax
Table[expr, {i, imin,imax}]	عمل قائمة تحتوى على قيم expr ابتداء من i=imin حتى i=imax
Table[expr, {i, imin, imax, di}]	عمل قائمة تحتوى على قيم expr ابتداء من i=imin حتى i=imax بخطوة step مقدارها di
Table[expr,{i, imin, imax}, {j, jmin, jmax}, ...]	عمل جدول من القوائم يحتوى على قيم expr فى اكثر من بعد ... , i , j
TableForm[list]	كتابة القائمة list فى الشكل التقليدى للمصفوفة

ولتوضيح عمل الأمر Table نعطى الأمثلة الآتية :

لتوليد قائمة تحتوى على أربعة نسخ من الرمز x

```
In[33]:=Table[x,{4}]
Out[33]= {x, x, x, x}
```

لتوليد قائمة تحتوى على خمسة أعداد عشوائية فى الفترة [0,1]

```
In[34]:=Table[Random[],5]
Out[34]=
{0.803812, 0.152706, 0.0624843, 0.59723, 0.192153}
```

لتوليد قائمة تحتوى على قيم i^2 من i=1 الى i=7

```
In[35]:=Table[i^2,{i,7}]
Out[35]= {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49}
```

لتوليد قائمة تحتوى على المقدار الجبرى x^i+2i x من i=3 الى i = 6

```
In[36]:=Table[ x^i + 2i x,{i,3,6}]
Out[36]=
```

$\{6\,x + x^3,\ 8\,x + x^4,\ 10\,x + x^5,\ 12\,x + x^6\}$

لتوليد قائمة عناصرها هى مكعبات الأعداد الزوجية المحصورة بين 8 , 2

```
In[37]:=Table[i^3 ,{i,2,8,2}]
Out[37]= {8, 64, 216, 512}
```

لتوليد قائمة m تحتوى على قيم i^2 +2j حيث i=1,2,3 & j=2,3,4,5

```
In[38]:=m=Table[i^2+2j,{i,3},{j,2,5}]
Out[38]:=
{{5, 7, 9, 11}, {8, 10, 12, 14}, {13, 15, 17, 19}}
```

ولعرض القائمة m فى صورة جدول

```
In[39]:= TableForm[m]
Out[39]= 5    7    9    11
         8    10   12   14
         13   15   17   19
```

ثانيا : المصفوفات Matrices

المصفوفات والعمليات الخاصة بها تستخدم بشكل كبير فى الرياضيات ويمكن الاستفادة من ماثيماتيكا فى إجراء العمليات الرياضية الخاصة بالمصفوفات والتى كانت تستغرق الكثير من الوقت خاصة إذا كانت المصفوفات من أبعاد كبيرة . والمصفوفات فى ماثيماتيكا عبارة عن قوائم من قوائم lists of lists فمثلا

- القائمة {a,b,c} تمثل المتجه (a,b,c) وهى مصفوفة من صف واحد وثلاثة اعمدة
- والقائمة {{a,b},{c,d}} تمثل المصفوفة $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ وهى مصفوفة من صفين وعمودين
- والقائمة $\{\{a_1,a_2,a_3\},\{b_1,b_2,b_3\}\}$ تمثل المصفوفة $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ وهى مصفوفة من صفين وثلاثة اعمدة وهكذا ،

وبالتالى فانه يمكن إدخال عناصر المصفوفة بصورة القوائم ، ويحتوى ماثيماتيكا على الأوامر Table , Array والخاصة بتكوين مصفوفات ذات أبعاد مختلفة والأمر Table هو الأكثر استخداما .

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
تكوين مصفوفة من البعد mxn حيث m تمثل عدد الصفوف ، n تمثل عدد الأعمدة ، f تمثل دالة فى i,j لتوليد عناصر المصفوفة	Table[f,{i,m},{j,n}]
تكوين مصفوفة على شكل صف به n من العناصر على الصورة f[i]	Array[f, n]
تكوين مصفوفة من البعد mxn على الصورة {f[i,j]} حيث f[i,j] يمثل العنصر فى الصف i والعمود j	Array[f, {m,n}]
طباعة القائمة list فى الشكل التقليدى للمصفوفة	MatrixForm[list]

وفى ماثيماتيكا يمكن اجراء العمليات الحسابية من جمـــع وطـــرح وضـــرب علـــى المصفوفات ولتوضيح ذلك

تكوين مصفوفة على شكل صف به 6 عناصر

In[1]:= Array[h,6]

Out[1]={h[1], h[2], h[3], h[4], h[5], h[6]}

تكوين مصفوفة 2x2 عناصرها على صورة aij

In[2]:=Array[a,{2,2}]

Out[2]={{a[1, 1], a[1, 2]}, {a[2, 1], a[2, 2]}}

تكوين مصفوفة 3x3 عناصرها على الصورة $f_{ij} = 10\,i + j$ ثم عرض الناتـــج في الشـــكل التقليدى للمصفوفة

```
In[3]:=f=Table[10i+j,{i,3},{j,3}]
        ;MatrixForm[f]

Out[3]=  11  12  13
         21  22  23
         31  32  33
```

تكوين مصفوفة 3x3 عناصرها على صورة m_{ij}

```
In[4]:=g=Array[m,{3,3}]

Out[4]={{m[1, 1], m[1, 2], m[1, 3]},
        {m[2, 1], m[2, 2], m[2, 3]},
        {m[3, 1], m[3, 2], m[3, 3]}}
```

حساب مجموع المصفوفتان g , f ثم عرض الناتـــج في الشـــكل التقليدى للمصفوفة

In[5]:=MatrixForm[f+g]

```
Out[5]= 11 + m[1, 1]    12 + m[1, 2]    13 + m[1, 3]
        21 + m[2, 1]    22 + m[2, 2]    23 + m[2, 3]
        31 + m[3, 1]    32 + m[3, 2]    33 + m[3, 3]
```

حساب حاصل طرح المصفوفتان g , f ثم عرض الناتج في الشكل التقليدى للمصفوفة

In[6]:=MatrixForm[f-g]

```
Out[6]= 11 - m[1, 1]    12 - m[1, 2]    13 - m[1, 3]
        21 - m[2, 1]    22 - m[2, 2]    23 - m[2, 3]
        31 - m[3, 1]    32 - m[3, 2]    33 - m[3, 3]
```

حساب حاصل ضرب المصفوفة g في العدد 5

In[7]:=5g

```
Out[7]={ { 5 m[1, 1] , 5 m[1, 2] , 5 m[1, 3] },
         { 5 m[2, 1] , 5 m[2, 2] , 5 m[2, 3] },
         { 5 m[3, 1] , 5 m[3, 2] , 5 m[3, 3] } }
```

حساب خارج قسمة المصفوفة g على 3

In[8]:= g/3
Out[8]=

$$\{\{\frac{m(1,1)}{3},\frac{m(1,2)}{3},\frac{m(1,3)}{3}\},\{\frac{m(2,1)}{3},\frac{m(2,2)}{3},\frac{m(2,3)}{3}\},\{\frac{m(3,1)}{3},\frac{m(3,2)}{3},\frac{m(3,3)}{3}\}\}$$

حساب حاصل ضرب المصفوفتان g , f

In[9]:= f . g

Out[9]= {{11 m[1, 1] + 12 m[2, 1] + 13 m[3, 1],
11 m[1, 2] + 12 m[2, 2] + 13 m[3, 2],
11 m[1, 3] + 12 m[2, 3] + 13 m[3, 3]},
{21 m[1, 1] + 22 m[2, 1] + 23 m[3, 1],
21 m[1, 2] + 22 m[2, 2] + 23 m[3, 2],
21 m[1, 3] + 22 m[2, 3] + 23 m[3, 3]},
{31 m[1, 1] + 32 m[2, 1] + 33 m[3, 1],
31 m[1, 2] + 32 m[2, 2] + 33 m[3, 2],
31 m[1, 3] + 32 m[2, 3] + 33 m[3, 3]}}

تعريف المصفوفة f1 من رتبة 3x2 وتعريف المصفوفة f2 من رتبة 2x4 ثم حساب حاصل ضرب المصفوفتان f2 , f1 وعرض الناتج فى الشكل التقليدى للمصفوفة

In[10]:= f1={{2,-1},{1,0},{-3,4}};f2={{1,-2,3,0},{3,4,0,1}};
MatrixForm[f1.f2]

Out[10]=

-1	-8	6	-1
1	-2	3	0
9	22	-9	4

وفي ماثيماتيكا يمكن أجراء العمليات الأساسية على المصفوفات كالآتي :

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
حساب مدور المصفوفة m	Transpose[m]
حساب قيمة محدد المصفوفة m	Det[m]
حساب مصفوفة المحددات المصاحبة من رتبة kxk من المصفوفة m	Minors[m, k]
حساب معكوس المصفوفة المربعة m	Inverse[m]
حساب m^k	MatrixPower[m,k]

حساب مدور المصفوفة g ثم عرض الناتج في الشكل التقليدى للمصفوفة

```
In[11]:=g1=Transpose[g];MatrixForm[g1]
Out[11]=  m[1, 1]   m[2, 1]   m[3, 1]
          m[1, 2]   m[2, 2]   m[3, 2]
          m[1, 3]   m[2, 3]   m[3, 3]
```

تعريف المصفوفة g2 من رتبة 2x2 ثم حساب قيمة المحدد

```
In[12]:=g2={{2,4},{1,7}};Det[g2]
Out[12]=10
```

حســــــــاب معكوس المصفوفة g2

In[13]:=Inverse[g2]

Out[13]= $\{\{\frac{7}{10}, -(\frac{2}{5})\}, \{-(\frac{1}{10}), \frac{1}{5}\}\}$

لحساب $(g2)^3$

In[14]:=MatrixPower[g2,3]

Out[14]={{52, 284}, {71, 407}}

تعريف المصفوفة g3 من رتبة 3x3 ثم حساب مصفوفة المـحددات المصاحبة من رتبة 2x2 من المصفوفة g3

In[15]:=g3={{1,5,7},{2,4,3},{-1,6,0}}; Minors[g3,2]

Out[15]={{-6, -11, -13}, {11, 7, -42}, {16, 3, -18}}

حساب قيمة المحدد للمصفوفة g3

In[16]:=d=Det[g3] }}

Out[16]=279

حســــــــاب معكوس المصفوفة g3

In[17]:=Inverse[g3]

Out[17]=

$$\{\{-(\frac{18}{79}), \frac{42}{79}, -(\frac{13}{79})\}, \{-(\frac{3}{79}), \frac{7}{79}, \frac{11}{79}\}, \{\frac{16}{79}, -(\frac{11}{79}), -(\frac{6}{79})\}\}$$

f[i]	لتحديد الصف رقم i في المصفوفة f
f[[i,j]]	لتحديد العنصر f_{ij} بالصف رقم i والعمود رقم j في المصفوفة f
Sum[f[[i,i]],{i,n}]	لحساب مجموع عناصر القطر الرئيسى فى المصفوفة المربعة f من رتبة nxn
Transpose[f][[j]]	لتحديد العمود رقم j في المصفوفة f

تحديد الصف الثانى من المصفوفة g

```
In[18]:=g[[2]]
Out[18]={m[2, 1], m[2, 2], m[2, 3]}
```

لتحديد العنصر الموجود فى الصف الثالث والعمود الأول فى المصفوفة g

```
In[19]:=g[[3,1]]
Out[19]=m[3, 1]
```

لحساب مجموع عناصر القطر الرئيسى فى المصفوفة g

```
In[20]:=Sum[g[[i,i]],{i,3}]
Out[20]=m[1, 1] + m[2, 2] + m[3, 3]
```

لتحديد العمود الثالث من المصفوفة g

In[21]:=Transpose[g][[3]]
Out[21]={m[1, 3], m[2, 3], m[3, 3]}

ويستطيع برنامج ماثيماتيكا تكوين مصفوفات من اشكال مختلفة كالآتي :

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
تكوين مصفوفة قطرية بحيث أن عناصر القائمة list توضع فى قطر المصفوفة وباقى العناصر أصفار	DiagonalMatrix[list]
تكوين مصفوفة الوحدة من البعد nxn	IdentityMatrix[n]
تكوين مصفوفة صفرية من البعد mxn	Table[0,{m},{n}]
تكوين مصفوفة مثلثية عليا Upper Triangular عناصرها فى أعلى القطر 1 وخلاف ذلك أصفار	Table[If[i<=j,1,0],{i,m},{j,n}]

تكوين مصفوفة قطرية من القائمة {a,b,c}

In[22]:=DiagonalMatrix[{a,b,c}]
Out[22]={{a, 0, 0}, {0, b, 0}, {0, 0, c}}

تكوين مصفوفة الوحدة من البعد 3x3

In[23]:=IdentityMatrix[3]
Out[23]={{1, 0, 0}, {0, 1, 0}, {0, 0, 1}}

تكوين مصفوفة صفرية من البعد 3x2

```
In[24]:=Table[0,{i,3},{j,2}]
Out[24]={{0,0},{0,0},{0,0}}
```

تكوين مصفوفة مثلثية عليا من البعد 3x3

```
In[25]:=Table[If[i<=j,1,0],{i,3},{j,3}]
Out[25]={{1, 1, 1}, {0, 1, 1}, {0, 0, 1}}
```

تكوين مصفوفة مثلثية سفلى من البعد 4x4

```
In[26]:=Table[If[i>=j,1,0],{i,4},{j,4}]
Out[26]=
{{1, 0, 0, 0}, {1, 1, 0, 0}, {1, 1, 1, 0},{1, 1, 1, 1}}
```

لعرض المصفوفة الناتجة من جملة الإدخـــال In[26] فى الشكل التقليدى للمصفوفة

```
In[27]:=MatrixForm[%26]
Out[27]=  1   0   0   0
          1   1   0   0
          1   1   1   0
          1   1   1   1
```

ثالثا : حل الأنظمـــة الخطيـــة Solving Linear Systems

نظرية المعادلات الخطية linear equations تلعب دورا هاما فى الجبر الخطى , وفـــى الحقيقة فإن دراسة مسائل عديدة فى الجبر الخطى يتم تحويلها الى دراسة نظـــام مـــن المعـــادلات الخطية . والمعادلة الخطية هى معادلة لها الصورة $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$ حيث x_i تمثل متغيرات , a_i أعداد حقيقية وتمثل معاملات المتغيرات , b عدد حقيقى ويمثل الحد الثابت .

وكثيرا ما نحتاج الى إيجاد حلول أنظمة من المعادلات الخطية , وفى بعض الحـــالات يكـــون مـــن الأفضل كتابة المعادلات ثم حلها باستخدام الأمر Solve وفى حالات أخرى يكون من المفيـــد تحويل نظام المعادلات الخطية الى شكل مصفوفات m . x = b حيث x يمثل متجه المتغيرات , m يمثل مصفوفة المعاملات , b يمثل متجه الثوابت .

حل المعادلتين باستخدام الأمر Solve مباشرة

```
In[1]:=Solve[{x+5y==1,2x+y==3},{x,y}]
```

$$\text{Out[1]=}\{\{x\text{->}\frac{14}{9},\ y\text{->}-(\frac{1}{9})\}\}$$

تعريف المصفوفة mat1 من رتبة 3x3

```
In[2]:=mat1={{2,1,-2},{3,2,2},{5,4,3}}
Out[2]={{2, 1, -2}, {3, 2, 2}, {5, 4, 3}}
```

تكوين نظام من ثلاث معادلات

```
In[3]:=mat1.{x,y,z}=={10,1,4}
Out[3]={2 x + y - 2 z, 3 x + 2 y + 2 z,
        5 x + 4 y + 3 z} == {10, 1, 4}
```

حل نظام المعادلات باستخدام الأمر Solve مباشرة

```
In[4]:=Solve[%,{x,y,z}]
Out[4]={{x -> 1, y -> 2, z -> -3}}
```

حل نظام المعادلات باستخدام معكوس المصفوفة

```
In[5]:= {x,y,z}=Inverse[mat1].{10,1,4}
Out[5]={1, 2, -3}
```

وبرنامج ماثيماتيكا قادر على حل نظام المعادلات الخطية فى صورة مصفوفة باستخدام الأمر **LinearSolve** كالآتي :

لايجاد متجه المتغيرات x الذى يحقق نظام المعادلات الخطية m . x = b	**LinearSolve[m, b]**

وعند التعامل مع مصفوفات من ابعاد كبيرة يكون من الافضل استخدام الأمر **LinearSolve** لحل نظام المعادلات .

حل نظام المعادلات الخطية

$$\begin{aligned} 2x + y - 2z &= 10 \\ 3x + 2y + 2z &= 1 \\ 5x + 4y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

فى صورة مصفوفة باستخدام الأمر **LinearSolve** يكون كالآتي:

```
In[6]:=LinearSolve[mat1,{10,1,4}]
Out[6]={1, 2, -3}
```

حيث **mat1** هى مصفوفة المعاملات $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ فى نظام المعادلات المعرف فى جملة الإدخال **In[3]** والحل يكون

$$x = 1 \ , \ y = 2 \ , \ z = -3$$

حل نظام المعادلات الخطية

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 14 \end{pmatrix}$$

فى صورة مصفوفة باستخدام الأمر **LinearSolve** يكون كالآتي :

```
In[7]:=mat2={{1,2,-3},{2,-1,4},{4,3,-2}};
       LinearSolve[mat2,{6,2,14}]
Out[7]={2, 2, 0}
```

والحل يكون $x = 2\ ,\ y = 2\ ,\ z = 0$

حل نظام المعادلات الخطية

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

فى صورة مصفوفة باستخدام الأمر **LinearSolve** يكون كالآتي :

```
In[8]:=mat3={{1,-3,4,-2},{0,2,5,1},{0,1,-3,0}};
       LinearSolve[mat3,{5,2,4}]
```

Out[8]= $\{\frac{157}{11},\frac{26}{11},-(\frac{6}{11}),0\}$

ونلاحظ أن نظام المعادلات يتكون من ثلاثة معادلات فى أربعة مجاهيل وله عدد لا نهائى من الحلول لأنه تم حساب ثلاث مجاهيل بدلالة المجهول الرابع وناتج الحل يمثل حل نظام المعادلات بعد اخذ قيمة عددية للمجهول الرابع .

وإذا كان m مصفوفة مربعة فإننا نعلم من دراستنا فى الجبر الخطى أن نظام المعادلات

$$m . x = b$$

يكون له حل وحيد لآي متجه ثوابت b إذا كان محدد المصفوفة m لا يساوى صفر بينما إذا كان محدد المصفوفة m يساوى صفر فهذا يعنى انه لا يوجد حل x يحقق نظام المعادلات m . x = b لقيمة خاصة للمتجه b وبمعنى آخر أن المعادلات تعتمد على بعضها dependent وفى هذه الحالة فإن مجموعة المتجهات x التى تحقق m . x = 0 تسمى الفراغ الصفرى nullspace للمصفوفة m أو m kernel وماثيماتيكا قادر على حساب متجهات الأساس Basis للفراغ الصفرى لمصفوفة وذلك باستخدام الأمر NullSpace كالآتي :

NullSpace[m]

لإيجاد متجهات أساس basis vectors جميع تركيباتها الخطية linear combinations تحقق المعادلة m . x = 0 حيث 0 هو المتجه الصفرى

In[9]:=mat4={{1,2,1},{2,4,2},{3,6,3}} ;Det[mat4] Out[9]=0	محدد المصفوفة mat4 يساوى صفر

In[10]:=LinearSolve[mat4,{a,b,c}] Out[10]=LinearSolve::nosol: Linear equation encountered which has no solution. LinearSolve[{{1, 2, 1}, {2, 4, 2}, {3, 6, 3}}, {a, b, c}]	الدالة LinearSolve لا تستطيع إيجاد حل نظام المعادلات

In[11]:=NullSpace[mat4] Out[11]={{-1, 0, 1}, {-2, 1, 0}}	أساس الفراغ الصفرى للمصفوفة mat4 يحتوى على متجهان

ومن المميزات الهامة للأمر LinearSolve والأمر NullSpace هو التعامل مع مصفوفات من أي رتبة .

رابعا : القيم المميزة والمتجهات المميزة Eigenvalues and Eigenvectors

القيم المميزة لمصفوفة m هى قيم λ التى تحقق المعادلة m . λ x = x حيث x متجه غير صفرى وفى هذه الحالة فإن المتجهات x التى تحقق هذه المعادلة تسمى المتجهات المميزة للمصفوفة m والتى تناظر القيمة المميزة λ ويمكن الحصول على القيم المميزة من حل كثيرة الحدود المميزة Characteristic polynomial وتعطى بالمعادلة

$$|m-\lambda J|=0$$

حيث J مصفوفة الوحدة ، وبرنامج ماثيماتيكا قادر على حساب القيم المميزة والمتجهات المميزة لآي مصفوفة كالآتي :

الوظيفة التي يقوم بها الأمر	الصيغة العامة للأمر
تكوين قائمة تحتوى على جميع القيم المميزة للمصفوفة m	**Eigenvalues[m]**
تكوين قائمة تحتوى على جميع المتجهات المميزة للمصفوفة m	**Eigenvectors[m]**
تكوين قائمة تحتوى على جميع القيم المميزة و المتجهات المميزة للمصفوفة m وتكون بالصورة **{ eigenvalue,eigenvector }**	**Eigensystem[m]**
تكوين قائمة تحتوى علىقيم عددية تقريبية للقيم المميزة للمصفوفة m	**Eigenvalues[N[m]]**

تعريف المصفوفة $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

```
In[1]:=m={{1,2},{3,2}}
Out1]= {{1, 2}, {3, 2}}
```

```
In[2]:=Eigenvalues[m]
Out[2]= Eigenvalues::eival:
  Unable to find all roots of the characteristic polynomial.
  Eigenvalues[{{1, 2}, {3, 2}}]
```

نلاحظ أن ماثيماتيكا لا يتمكن من حساب القيم المميزة للمصفوفة m لان عناصر المصفوفة أعداد صحيحة ويمكن التغلب على هذه المشكلة عن طريق كتابة الأعداد الموجودة فى المصفوفة بالصورة العشرية (فمثلا يكتب .3 بدلا من 3) كما يمكن عمل ذلك باستخدام الدالة N

القيم المميزة للمصفوفة m

```
In[3]:=Eigenvalues[N[m]]
Out[3]= {4., -1.}
```

المتجهات المميزة للمصفوفة m

```
In[4]:=Eigenvectors[N[m]]
Out[4]= {{-0.5547, -0.83205}, {-0.707107, 0.707107}}
```

تكوين قائمة تحتوى على جميع القيم المميزة و المتجهات المميزة للمصفوفة m

```
In[5]:={values,vectors}=Eigensystem[N[m]]
Out[5]= {{4., -1.}, {{-0.5547,-0.83205},
          {-0.707107, 0.707107}}}
```

للتحقق من أن القيمة المميزة الأولى k_1 والمتجه المميز x يحقق المعادلة x $m . x = k_1$ x

In[6]:=m.vectors[[1]]= =values[[1]] vectors[[1]]

Out[6]= True

لإيجاد المعادلة المميزة للمصفوفة m

In[7]:=po=Det[m-k IdentityMatrix[Dimensions[m][[1]]]]

Out[7]= $-4 - 3\ k + k^2$

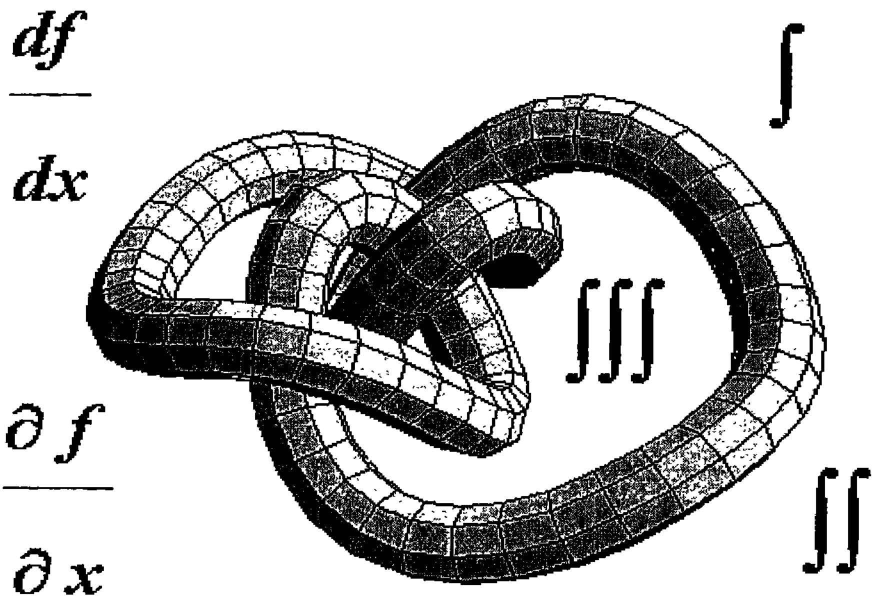
لحل المعادلة المميزة والحصول على القيم المميزة للمصفوفة m

In[8]:=Solve[po==0,k]

Out[8]= {{k -> -1}, {k -> 4}}

الباب الرابع

ماثيماتيكا والتفاضل والتكامل



فى هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكا والخاصة بالموضوعات الآتية :

١. تعريف الدوال **Defining Functions**

٢. النهايات **Limits**

٣. التفاضل **Differentiation**

٤. التكامل **Integration**

٥. المعادلات التفاضلية **Differential Equations**

الباب الرابع

ماثيماتيكا والتفاضل والتكامل

نعلـــم أن برنـــامج ماثيماتيكـــا يســـتطيع التعـــامل مــــع التعبــــيرات الرمزيـــة Symbolic expressions بنفس المقدرة على التعامل مع الأعداد و لذلك يمكن اســــتخدام ماثيماتيكا فى حساب النهايات Limits وحساب التفاضل والتكـــامل Calculus للـــدوال المختلفة والحصول على النتائج فى صورة رمزية سواء كانت هذه الدوال من الدوال الأساســـية الموجودة داخل بناء ماثيماتيكا built-in أو دوال نقوم بتعريفها ، وكذلك يمكـــن اســـتخدام ماثيماتيكا فى حل المعادلات التفاضلية .

١ . تعريف الدوال Defining Functions

إلى جانب العديد من الدوال الموجودة داخل بناء ماثيماتيكا فإنه يمكن للمســـتخدم إضافـــة أي دوال جديدة يحتاج إليها وبأسماء يقترحها بنفســـه وســـوف نســـتخدم الحـــروف الصغـــيرة lower case - letters فى كتابة أسماء هذه الدوال الجديدة حتى لا يحدث تداخل بين أسمـــاء الدوال الموجودة فى بناء ماثيماتيكا وبين أسماء الدوال الجديدة التى يقوم المستخدم بتعريفها وفقـــا لقواعد معينة . فمثلا تعريف الدالة $f(x)=x^2$ فى ماثيماتيكا يكتب فى الصورة f [x_]=x^2 والعلامة _ الموجودة فى الطرف الأيسر بجانب المتغير x تسمى الفراغ الخالى blank space وهى هامة فى تعريف الدالة حيث النمط x_ pattern يرمز الى أي تعبير أو متغـــير وبذلـــك فإن تعريف الدالة بهذه الصورة يصف قاعدة تحويل Transformation Rule لجميع التعبيرات التى على الصورة f[anything] حيث anything يشير الى المتغير x أو أي متغير آخـــر

وعندما يظهر تعبير على الصورة f[anything] فإنه يستبدل بالقيمة anything ^ 2 والتى تمثل ناتج تعريف الدالة f .

تعريف الدالة $f(x)=x^2$

In[1]:=f[x_]=x^2
Out[1]=x^2

عند حساب قيمة الدالة f(x) عند x = 3 فإن الناتج يكون 3^2 ويساوى 9

In[2]:=f[3]
Out[2]= 9

لحساب قيمة الدالة f(x) عند x = a+1

In[3]:=f[a+1]
Out[3]=$(a+1)^2$

عند حساب قيمة f(x) + f(y)

In[4]:=f[x]+f[y]
Out[4]=$x^2 + y^2$

وفى حالة عدم كتابة العلامة _ بالطرف الأيسر فى تعريف الدالة فإن f[x] سوف تمثل تعبير خاص وليس قاعدة تحويل فمثلا إذا أدخلنا فى ماثيماتيكا التعريف g[x]=x^3 فإنه عند ظهور التعبير g[x] يتم استبداله بالقيمة x^3 لكن التعريف لا يعطينا أي معلومات إذا استبدلنا المتغير x بقيمة عددية أو بمتغير آخر فمثلا g[3] ليس لها قيمة ناتجة من التعريف وبالمثل g[a] ليس لها قيمة ناتجة من التعريف وهذا حدث نتيجة لعدم استخدام النمط _ فى تعريف الدالة g .

تعريف $g(x)=x^3$ بدون استخدام النمط _

In[5]:=g[x]=x^3
Out[5]= x^3

عند حساب قيمة g(x) عند x = 3 فإن الناتج يكون g[3] أي أن g(x) لا تمثل قاعدة تحويل

In[6]:=g[3]
Out[6]= g[3]

حساب قيمة g(x) عند x = a فإن الناتج يكون g[a] آي أن g(x) لا تمثل قاعدة تحويل

In[7]:=g[a]

Out[7]= g[a]

عند حساب قيمة g(x) + g(y) نلاحظ أن الناتج x^3 + g[y] لان $g(x)=x^3$ بينما g(y) ليست معلومة

In[8]:=g[x]+g[y]

Out[8]=x^3 + g[y]

ونتيجة لذلك يجب مراعاة الآتي عند تعريف الدوال فى ماثيماتيكا :

f[x] = value	تمثل تعريف لتعبير خاص وليس قاعدة تحويل
f[x_] = value	تمثل تعريف دالة وهى قاعدة تحويل لاى متغير x

وفى ماثيماتيكا يمكن الاستعلام عن تعريف الدوال أو حذف التعريف من الذاكرة كالآتي :

?f	للاستعلام عن تعريف الدالة f
Clear[f]	لحذف تعريف الدالة f من الذاكرة

للاستعلام عن تعريف الدالة f التى سبق إدخالها فى جملة الإدخال In[1]

In[9]:=?f

Out[9]= Global`f

f[x_] = x^2

لحذف تعريف الدالة f من الذاكرة

In[10]:=Clear[f]

والآن عند الاستعلام عن تعريف الدالة f نلاحظ أن التعريف قد حذف من الذاكرة

In[11]:=?f

Out[11]= Global`f

وفى برنامج ماثيماتيكـــا يمكن تعريف دوال فى اكثر من متغير ويتم ذلك بتحـــديد أسم للدالة واستخدام النمط _ لكل متغير فى الدالة .

تعريف الدالة r1 فى متغيرين

```
In[12]:=r1[x_,y_]=x^2+x y+y^2
```

$Out[12]=x^2 + x\ y + y^2$

لحساب قيمة الدالة r1(x,y) عند x=2 , y=3

```
In[13]:=r1[2,3]
Out[13]=19
```

تعريف الدالة r2 فى أربعة متغيرات

```
In[14]:=r2[x_,y_,z_,t_]=(x-z)^2+(y-t)^2
```

$Out[14]=(x-z)^2 + (y-t)^2$

وفى بـــرنامج ماثيماتيكـــا عند تعريف دالـــــة كجـــملة إحلال hs = rhs فإنـــه يوجـــد مؤثرين للإحلال assignment operators

المؤثر الأول هو علامة التساوى =

والمؤثر الثانى هو علامة :=

والفرق الأساسى بين المؤثرين يكون وفقا لطريقة حساب الطرف الأيمن rhs لجملـــــة الإحـــلال كالآتي :

المؤثر = يستخدم فى كتابة جملة الإحلال بالصورة lhs = rhs إذا كان الطـــــرف الأيمن rhs يتم حسابه مباشرة ليمثل القيمة النهائية للطرف الأيسر lhs

المؤثر := يستخدم فى كتابة جملة الإحلال بالصورة lhs := rhs إذا كان الطـــرف الأيمن rhs يتم حسابه كل مرة يطلب فيها حساب قيمة الطـــرف الأيســـر lhs بمعنى إذا كان الطرف الأيمن rhs يمثل أمر أو برنامج يتم تنفيذه عند السؤال عن الطرف الأيسر lhs

والأمثلة الآتية توضح الفرق بين المؤثر = والمؤثر :=

عند استخدام المؤثر = فى تعريف الدالة r3(x) التى تقوم بحساب مفكوك $(1+x)^2$ فإن المفكوك بالطرف الأيمن يتم حسابه مباشرة

In[15]:=r3[x_]=Expand[(1+x)^2]
Out[15]= $1+2x+x^2$

والآن عند الاستعلام عن تعريف الدالة r3(x) نلاحظ أن التعريف يحتوى على الطرف الأيمن بعد تنفيذه فى صورة مفكوك

```
In[16]:=?r3
Out[16]=Global`r3
        r3[x_] = 1 + 2*x + x^2
```

ولحساب قيمة الدالة r3(x) عند x = a + b يتم التعويض عن a + b فى المفكوك الموجود بالفعل وهو $1 + 2x + x^2$

In[17]:=r3[a+b]
Out[17]=$1 + 2 (a + b) + (a + b)^2$

عند استخدام المؤثر := فى تعريف الدالة r4(x) التى تقوم بحساب مفكوك $(1+x)^2$ فإن المفكوك بالطرف الأيمن يعاد حسابه فى كل مرة يطلب فيها حساب قيمة الدالة r4(x)

In[18]:=r4[x_]:=Expand[(1+x)^2]

والآن عند الاستعلام عن تعريف الدالة r4(x) نلاحظ أن التعريف هو نفسه الطرف الأيمن ويحتوى على أمر المفكوك Expand جاهز للتنفيذ

```
In[19]=?r4
Out[19]=Global`r4
      r4[x_] := Expand[(1 + x)^2]
```

ولحساب قيمة الدالة r4(x) عند x = a + b يتم التعويض عن a + b فى أمر المفكوك Expand[(1+a+b)^2] ثم يتم تنفيذه

In[20]:=r4[a+b]
Out[20]=$1 + 2 a + a^2 + 2 b + 2 a b + b^2$

وكمثال آخر نفرض أننا نريد تصميم دالة لحساب مضروب آي عدد صحيح Factorial function من القاعدة

$$n! = n\,(n-1)\,(n-2)\ \dots\ 3x2x1$$

تعريف دالة المضروب تحت اسم fa In[21]:=fa[1]=1;fa[n_]:=n fa[n-1]

نلاحظ انه فى جملة الإحلال الأولى fa[1]=1 استخدمنا المؤثر = لأن الطرف الأيمن قيمته محسوبة بينما فى جملة الإحلال الثانية fa[n]:=n fa[n-1] استخدمنا المؤثر := لأن الطرف الأيمن يتم حسابه كل مرة تنفيذ والقيمة المحسوبة بالطرف الأيسر lhs يتم استخدامها فى حساب الطرف الأيمن rhs فى كل مرة لذلك فإن المؤثر := ضرورى فى تعريف هذه الدالة .

لحساب 4!

```
In[22]:=fa[4]
Out[22]=24
```

لحساب 6!

```
In[23]:=fa[6]
Out[23]=720
```

للاستعلام عن الدالة fa

```
In[24]:=?fa
Out[24]=Global`fa
        fa[1] = 1
        fa[n_] := n*fa[n - 1]
```

لحذف تعريف الدالة fa من ذاكرة ماثيماتيكا

In[25]:=Clear[fa]

للاستعلام عن الدالة fa بعد حذفها ونلاحظ اختفاء التعريف

In[26]:=?fa

Out[26]=Global`fa

وماثيماتيكا عند تنفيذه لهذه الدالة لحساب fa[6] يستخدم التعريف المعطى للدالة بالصورة fa[6]=6 fa[5] وبعد ذلك يتم تطبيق التعريف مرة أخرى لحساب fa[5] من العلاقة fa[5]=5 fa[4] وبالمثل يتم تطبيق التعريف مرة أخرى لحساب fa[4] وهكذا حتى يصل الى fa[1] وقيمته معطاة ونلاحظ أن ماثيماتيكا عند حسابه لقيمة fa[6] لم يستخدم قيمة fa[4] المحسوبة من قبل ، ويمكن جعل الدوال المعرفة تتذكر القيم التى يتم حسابها من قبل وذلك بتعريف الدوال بالصورة الآتية :

تعريف دالة f يث تحفظ القيم التى يتم إيجادها	f[x_]:=f[x] = rhs

تعريف دالة المضروب تحت اسم fa بحيث تحفظ القيم التى يتم إيجادها

In[27]:=fa[1]=1;fa[n_]:=fa[n]=n fa[n-1]

للاستعلام عن الدالة fa

```
In[28]=?fa
Out[28]=Global`fa
        fa[1] = 1
        fa[n_] := fa[n] = n*fa[n - 1]
```

لحساب !4 بواسطة fa[4]

```
In[29]:=fa[4]
Out[29]=24
```

للاستعلام عن الدالة fa وسوف نلاحظ انه تم حفظ جميع قيم الدالة fa التى تم إيجادها

```
In[30]:=?fa
Out[30]=Global`fa
   fa[1] = 1
   fa[2] = 2
   fa[3] = 6
   fa[4] = 24
 fa[n_] := fa[n] = n*fa[n - 1]
```

لحساب !6 بواسطة fa[6]

```
In[31]:=fa[6]
Out[31]=720
```

للاستعلام عن الدالة fa وسوف نلاحظ انه تم حفظ جميع قيم الدالة fa التى تم إيجادها

```
In[32]:=?fa
Out[32]=Global`fa
  fa[1] = 1
  fa[2] = 2
  fa[3] = 6
  fa[4] = 24
  fa[5] = 120
  fa[6] = 720
fa[n_] := fa[n] = n*fa[n - 1]
```

٢ . النهايات Limits

فى بعض الحسابات الرياضية نحتاج الى تعويض أو إحلال لمتغير داخـــل التعبـــير الرياضى عندما يأخذ المتغير قيمة معينة فمثلا عند وضع جملة الإحلال x = 3 فهذا يعنى أن يقوم ماثيماتيكا باستبدال المتغير x بالقيمة 3 فى أي مكـــان بالبرنـــامج يظهر فيه المتغير x إلا إذا تم تغير قيمة x أو حذفها ، ولكن فى بعض الأحيان يكون المطلوب هو استبدال المتغير x بالقيمـــة 3 فـــى تعبـــير خـــاص **particular expression** ، ويمكن عمل ذلك فى ماثيماتيكا باستخدام المؤثر /. أو المؤثـــر //. كالآتي :

الوظيفة التى يقوم بها الأمر	الصيغة العامة للأمر
استبدال المتغير x بالقيمة value فى التعبير expr ويتم تطبيق القاعدة x->value مرة واحدة فقط	**expr /. x->value**
استبدال المتغير x بالقيمة xval والمتغـــير y بالقيمة yval فى التعبير expr ويتم تطبيـــق القاعدة y->yval , x->xval مرة واحدة فقط	**expr /. {x->xval,y->yval}**
تطبيق القاعدة rules فى التعبـــير expr مـــرة واحدة فقط حيث القـــاعدة rules تكـــون بالصورة lhs->rhs	**expr /. rules**
تطبيق القاعدة rules على كل أجـــزاء التعبـــير expr بصورة متكررة حتى نصل الى الناتج النهائى	**expr//.rules**
تطبيق القاعدة rules كوحدة متكاملـــة علـــى التعبير expr دون تطبيقها على الأجزاء الفرعيـــة من expr	**Replace[expr,rules]**

In[1]:=1+x^2/.x->3
Out[1]=10

استبدال المتغير x بالقيمة 3 فى التعبير الرياضى
x^2+1

In[2]:=x
Out[2]=x

عند الاستعلام عن قيمة x نلاحظ أن استخدام المؤثر ./ فى استبدال المتغير x بالقيمة 3 لا يؤثر فى قيمة المتغير x داخل البرنامج

In[3]:=x^2+2x y+y^2/.{x->1,y->2}
Out[3]=9

استبدال المتغير x بالقيمة 1 والمتغير y بالقيمة 2 فى التعبير الرياضى
$x^2+2xy+y^2$

In[4]:=t=x^2+2x+1;t/.x->5
Out[4]=36

إحلال قيمة x^2+2x+1 فى المتغير t ثم حساب قيمة t عندما x->5

In[5]:=f[5]/.f[x_]->x
Out[5]=5 f[4]

تطبيق القاعدة lhs->rhs لحساب f[5]
f[x-1]
ونلاحظ أن المؤثر ./ يقوم بتطبيق القاعدة مرة واحدة فقط

In[6]:=f[5]//.{f[1]->1,f[x_]->x f[x-1]}
Out[6]=120

عنداستخدام المؤثر .// يتم تطبيق القاعدة لحساب f[5] بصورة متكررة حتى نصل الى الناتج النهائى

In[7]:=f[x]^2+2f[x] /. f[x]->a
Out[7]=2a + a^2

عند استخدام المؤثر ./ يتم تطبيق القاعدة على كل الأجزاء فى التعبير الرياضى

عند حساب قيمة $\frac{\sin(x)}{x}$ لقيم x التى تقترب من الصفر نلاحظ ما يأتى :

In[8]:=Sin[x]/x /.x->0.6 Out[8]=0.941071	In[12]:=Sin[x]/x /.x->0.2 Out[12]=0.993347
In[9]:=Sin[x]/x /.x->0.5 Out[9]=0.958851	In[13]:=Sin[x]/x /.x->0.1 Out[13]=0.998334
In[10]:=Sin[x]/x /.x->0.4 Out[10]=0.973546	In[14]:=Sin[x]/x /.x->0.01 Out[14]=0.999983
In[11]:=Sin[x]/x /.x->0.3 Out[11]=0.985067	In[15]:=Sin[x]/x /.x->0.001 Out[15]=1.

ولحساب قيمة $\frac{\sin(x)}{x}$ عندما $x = 0$ فان الناتج يكون كمية غير معينة

In[16]:=Sin[x]/x /.x->0

Out[16]=Power::infy: Infinite expression $\frac{1}{0}$ encountered.

Infinity::indet:
Indeterminate expression

وفى برنامج ماثيماتيكا يمكن حساب النهايات $\lim_{x \to x_0} f(x)$ وذلك باستخدام

الدالة **Limit** كالآتى :

Limit[expr, x->x_0]	حساب نهاية الدالة **expr** عندما تقترب **x** من **x_0**

في الجدول الآتي نضع أمثلة متعددة على النهايات لبعض الدوال

النهاية بلغة الرياضيات	النهاية بلغة ماثيماتيكا
$\lim\limits_{x\to 2} x^2+3x-7$	In[17]:=Limit[x^2+3x-7,x->2] Out[17]=3
$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$	In[18]:=Limit[(x^2-1)/(x-1),x->1] Out[18]=2
$\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-4x+3}$	In[19]:=Limit[(x^2-9)/(x^2-4x+3),x->3] Out[19]=3
$\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$	In[20]:=Limit[(x^2+x-6)/(x^2-4),x->2] Out[20]= $-\frac{5}{4}$
$\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$	In[21]:=Limit[(Sqrt[x]-2)/(x-4),x->4] Out[21]= $\frac{1}{4}$
$\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$	In[22]:=Limit[Sqrt[x^2-4]/(x-2),x->2] Out[22]=Infinity
$\lim\limits_{h\to 0} \frac{x^2\,(x+h)}{2x+h}$	In[23]:=Limit[x^2(x+h)/(2x+h),h->0] Out[23]= $\frac{x^2}{2}$
$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x}{\sqrt{x-1}}$	In[24]:=Limit[x/Sqrt[x-1],x->1] Out[24]= Infinity

النهاية بلغة ماثيماتيكا	النهاية بلغة الرياضيات
In[25]:=Limit[Sin[x]/x,x->0] Out[25]=1	$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$
In[26]:=Limit[(Cos[x]-1)/x^2,x->0] Out[26]= $-\frac{1}{2}$	$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$
In[27]:=Limit[x^2/(Sec[x]-1),x->0] Out[27]=2	$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sec(x)-1}$
In[28]:=Limit[Sin[x-Pi/4]/(x-Pi/4)^2, x->Pi/4] Out[28]=Infinity	$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}$
In[29]:=Limit[Tan[3x]/(2x^2+5x),x->0] Out[29]= $\frac{3}{5}$	$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(3x)}{2x^2+5x}$
In[30]:=Limit[(2x^2-3x) / (3x^2+2),x->Infinity] Out[30]= $\frac{2}{3}$	$\lim_{x\to \infty} \frac{2x^2-3x}{3x^2+2}$
In[31]:=Limit[x^2 Sin[1/x^2],x->Infinity] Out[31]=1	$\lim_{x\to \infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$
In[32]:=Limit[(1+1/n)^n,n->Infinity] Out[32]=E	$\lim_{x\to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

٣ . التفاضل Differentiation

يستطيع برنامج ماثيماتيكا أجراء عمليات التفاضل للدوال الرياضية المختلفة في صورتها الرمزية في متغير واحد أو متغيرات متعددة ويتم الحصول على النتائج بصورة رمزية سواء كان التفاضل كلى **Total** أو تفاضل جزئى **Partial** ويتم ذلك في ماثيماتيكا باستخدام الأمر D كالآتي :

الوظيفة التي يقوم بها الأمر	الصيغة العامة للأمر في ماثيماتيكا
حساب المشتقة الأولى $\frac{df}{dx}$ إذا كانت الدالة f في متغير واحد أوحساب المشتقة الجزئية $\frac{\partial f}{\partial x}$ إذا كانت الدالة f في اكثر من متغير	D[f,x]
حساب المشتقة $\frac{d^n f}{dx^n}$ إذا كانت الدالة f في متغير واحد أو حساب المشتقة الجزئية $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ إذا كانت الدالة f في اكثر من متغير	D[f,{x,n}]
حساب المشتقة الجزئية $\frac{\partial}{\partial x1}\frac{\partial}{\partial x2}\dots f$	D[f,x1,x2,...]
حساب المشتقة الجزئية $\frac{\partial f}{\partial x}$ مــع اعتبــار أن المتغيرات v1,v2,... دوال تعتمد على المتغير x	D[f,x,NonConstants->{v1,v2,...}]

في الجدول الآتي نضع أمثلة لتفاضل بعض الدوال

التفاضل بلغة ماثيماتيكا	التفاضل بلغة الرياضيات
In[1]:=D[x^n,x] Out[1]= n x $^{n-1}$	$\frac{d}{dx} x^n$
In[2]:=D[x^5+4x^3-2x+6,x] Out[2]= -2 + 12 x^2 + 5 x^4	$\frac{d}{dx}\left(x^5+4x^3-2x+6\right)$
In[3]:=D[x^5+4x^3-2x+6,{x,2}] Out[3]=24 x + 20 x^3	$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^5+4x^3-2x+6\right)$
In[4]:=D[x^n,{x,3}] Out[4]=(-2 + n) (-1 + n) n x^{n-3}	$\frac{d^3}{dx^3} x^n$
In[5]:=D[Sin[x],x] Out[5]=Cos[x]	$\frac{d}{dx} \sin(x)$
In[6]:=D[Tan[x],x] Out[6]=Sec^2[x]	$\frac{d}{dx} \tan(x)$
In[7]:=D[x^3 Cos[x],x] Out[7]=3 x^2 Cos[x] - x^3 Sin[x]	$\frac{d}{dx} x^3 \cos(x)$
In[8]:=D[4x^2 Sec[x^3],x] Out[8]=8x^2 Sec[x^3]+ 12 x^4 Sec[x ^{3}] Tan[x^3]	$\frac{d}{dx} 4x^2 \sec(x^3)$

التفاضل بلغة ماثيماتيكا	التفاضل بلغة الرياضيات
In[9]:=D[ArcSin[x],x] Out[9]= $\frac{1}{Sqrt[1-x^2]}$	$\frac{d}{dx}\sin^{-1}(x)$
In[10]:=D[ArcTan[x^2],x] Out[10]= $\frac{2x}{1+x^4}$	$\frac{d}{dx}\tan^{-1}(x^2)$
In[11]:=D[Sin[t]/t,t] Out[11]= $\frac{Cos[t]}{t}-\frac{Sin[t]}{t^2}$	$\frac{d}{dx}\frac{\sin(t)}{t}$
In[12]:=D[Log[x]^2,x] Out[12]= $\frac{2Log[x]}{x}$	$\frac{d}{dx}(Log(x))^2$
In[13]:=D[f[x],x] Out[13]=f'[x]	$\frac{d}{dx}f(x)$
In[14]:=D[f[x^2],x] Out[14]=2 x f'[x]	$\frac{d}{dx}f(x^2)$
In[15]:=D[x^2+y[x]^3,x] Out[15]= 2x + 3 (y[x])^2 y'[x]	$\frac{d}{dx}\left(x^2+(y(x))^3\right)$
In[16]:=D[x^2+y^3,x,NonConstants->{y}] Out[16]= 2x + 3 y^2 D[y, x, NonConstants -> {y}]	$\frac{d}{dx}\left(x^2+y^3\right)$ مع اعتبار أن y دالة في x

التفاضل بلغة ماثيماتيكا	التفاضل بلغة الرياضيات
In[17]:=D[x^2 y+Cos[x y],x] Out[17]=2 x y - y Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[18]:=D[x^2 y+Cos[x y],y] Out[18]=x^2 - x Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[19]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,x] Out[19]=2y - y^2 Cos[x y]	$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[20]:=D[x^2 y+Cos[x y],y,y] Out[20]= − x^2 Cos[x y]	$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[21]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,y] Out[21]=2x - x y Cos[x y] - Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[22]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,x,x] Out[22]= y^3 Sin[x y]	$\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[23]:=D[x^2 y+Cos[x y],y,y,y] Out[23]= x^3 Sin[x y]	$\frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[24]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,y,x] Out[24]= 2 -2y Cos[x y] + x y^2 Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[25]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,y,y] Out[25]= − 2 x Cos[x y] + x^2 y Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$

وعند أجراء التفاضل على دالة f في عدة متغيرات وبحيث يتم إدخالها بــــالرمز f نلاحظ أن ناتج التنفيذ يكون كالآتي :

In[26]:=D[f[x,y],x] Out[26]= $f^{(1,0)}$ [x, y]	$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ تمثل $f^{(1,0)}$ [x, y]
In[27]:=D[f[x,y],y] Out[27]= $f^{(0,1)}$ [x, y]	$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ تمثل $f^{(0,1)}$ [x, y]
In[28]:=D[f[x,y],x,x] Out[28]= $f^{(2,0)}$ [x, y]	$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y)$ تمثل $f^{(2,0)}$ [x, y]
In[29]:=D[f[x,y],x,y] Out[29]= $f^{(1,1)}$ [x, y]	$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ تمثل $f^{(1,1)}$ [x, y]
In[30]:=D[f[x,y],x,y,y] Out[30]= $f^{(1,2)}$ [x, y]	$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y)$ تمثل $f^{(1,2)}$ [x, y]
In[31]:=D[f[x,y,z],x] Out[31]= $f^{(1,0,0)}$ [x, y, z]	$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z)$ تمثل $f^{(1,0,0)}$ [x, y, z]
In[32]:=D[f[x,y,z],x,x,y,z, z,z] Out[32]= $f^{(2,1,3)}$ [x, y, z]	$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^3}{\partial z^3} f(x,y,z)$ تمثل $f^{(2,1,3)}$ [x, y, z]

نعلم أن إذا كانت $f = f(x,y)$ فإن التفاضلة الكلية (Total Differential) يرمز لها **df** وتعرف بالصورة

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

والأمر **D** كما رأينا فى المثال $D[x^n,x]$ يقوم بحساب المشتقة الجزئية للدالة x^n بالنسبة الى **x** مع اعتبار أن **n** ثابت لا يعتمد على **x** وفى ماثيماتيكا يوجد أمر آخر يرمز له **Dt** ويقوم بحساب المشتقة الكلية **Total Derivative** وعند تنفيذه فإنه يأخذ جميع المتغيرات فى الاعتبار .

الصيغة العامة للأمر فى ماثيماتيكا	الوظيفة التى يقوم بها الأمر
Dt[f]	حساب التفاضلة الكلية **df**
Dt[f,x]	حساب المشتقة الكلية $\frac{df}{dx}$
Dt[f,{x,n}]	حساب المشتقة الكلية من رتبة **n** آي حساب $\frac{d^n f}{d x^n}$
Dt[f,x,Constants->{v1,v2,...}]	حساب المشتقةالكلية $\frac{df}{dx}$ مع اعتبـــار أن المتغيرات ...v1,v2, ثوابت لا تعتمد على المتغير **x** أي أن ... , dv1=0 , dv2=0

في الجدول الآتي نضع أمثلة لتفاضلات بعض الدوال

التفاضلة بلغة ماثيماتيكا	التفاضلة بلغة الرياضيات
In[33]:=Dt[f[x]] Out[33]=Dt[x] f'[x]	$df = f'(x)\, dx$
In[34]:= Dt[x^n] Out[34]= $n\, x^{n-1}$ Dt[x] + x^n Dt[n] Log[x]	$dx^n = nx^{n-1}\, dx + x^n \mathrm{Log}[x]\, dn$
In[35]:=Dt[x^n,Constants->{n}] Out[35]= $n\, x^{n-1}$ Dt[x,Constants- > {n}]	$dx^n = nx^{n-1}\, dx$ حيث n ثابت
In[36]:=Dt[f[x,y]] Out[36]= Dt[y] $f^{(0,1)}$ [x, y] + Dt[x] $f^{(1,0)}$ [x, y]	$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$
In[37]:= Dt[x^2Sin[y]+y^2,y] Out[37]= 2y+x^2 Cos[y]+2x Dt[x,y] Sin[y]	$\frac{d}{dy}\left(x^2 \sin(y) + y^2\right) = 2y + x^2 \cos(y) + 2x \sin(y) \frac{dx}{dy}$
In[38]:=Dt[x^2+y^2+z^2,x] Out[38]= 2 x + 2 y Dt[y, x] + 2 z Dt[z, x]	$\frac{d}{dx}\left(x^2+y^2+z^2\right) = 2x + 2y\frac{dy}{dx} + 2z\frac{dz}{dx}$
In[39]:= Dt[x^2+y^2+z^2,x,Constants>{z}] Out[39]= 2 x + 2 y Dt[y, x, Constants -> {z}]	$\frac{d}{dx}\left(x^2+y^2+z^2\right) = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$ حيث z ثابت

٤ . التكامل Integration

برنامج ماثيماتيكا قادر على حساب أنواع عديدة من التكاملات لتعبيرات رياضية تحتوى على كثيرات الحدود والدوال الأسية واللوغاريتمية والمثلثية ... الخ ، وناتج التكامل يكون فى صورة رمزية ويمكن حساب التكاملات المتعددة (الثنائية والثلاثية ... الخ)وكذلك التكاملات المحدودة سواء كان حدود التكامل أعداد ثابتة أو دوال ويتم ذلك باستخدام الأمر Integrate كالآتي:

الوظيفة التى يقوم بها الأمر	الصيغة العامة للأمر فى ماثيماتيكا
حساب التكامل $\int f\ dx$	Integrate[f,x]
حساب التكامل المحدود $\int_{x0}^{x1} f\ dx$	Integrate[f,{x,xo,x1}]
حساب التكامل الثنائى $\int_{xo}^{x1}\int_{yo}^{y1} f\ dy\ dx$	Integrate[f,{x,xo,x1},{y, yo,y1}]
حساب التكامل $\int_{xo}^{x1}\int_{yo}^{y1}\int_{...}^{...} f\ ...\ dy\ dx$	Integrate[f,{x,xo,x1},{y, yo,y1},...]

فى الجدول الآتي نضع أمثلة لتكامل بعض الدوال

التكامل بلغة الرياضيات	التكامل بلغة ماثيماتيكا
$\int x^n \, dx$	In[1]:=Integrate[x^n,x] Out[1]= $\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\int x^n \, dn$	In[2]:=Integrate[x^n,n] Out[2]= $\frac{x^n}{\text{Log}[x]}$
$\int \frac{1}{x} \, dx$	In[3]:=Integrate[1/x,x] Out[3]=Log[x]
$\int \text{Log}(x) \, dx$	In[4]:=Integrate[Log[x],x] Out[4]= -x + x Log[x]
$\int x^3 e^x \, dx$	In[5]:=Integrate[x^3 Exp[x],x] Out[5]= $E^x\ (-6 + 6x - 3x^2 + x^3)$
$\int \frac{1}{x^2+1} \, dx$	In[6]:=Integrate[1/(x^2+1),x] Out[6]=ArcTan[x]
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$	In[7]:=Integrate[1/Sqrt[1-x^2],x] Out[7]=ArcSin[x]

التكامل بلغة ماثيماتيكا	التكامل بلغة الرياضيات
In[8]:=Integrate[1/Sqrt[9-x^2],x] Out[8]=ArcSin[$\frac{x}{3}$]	$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$
In[9]:=Integrate[1/Sqrt[1+x^2],x] Out[9]=ArcSinh[x]	$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$
In[10]:=Integrate[x^2 Sin[x],x] Out[10]=2 Cos[x] - x^2 Cos[x] + 2 x Sin[x]	$\int x^2 \sin(x)\,dx$
In[11]:=Integrate[y x^2,x] Out[11]= $\frac{y\,x^3}{3}$	$\int yx^2\,dx$
In[12]:=Integrate[x^2,{x,1,4}] Out[12]= 21	$\int_1^4 x^2\,dx$
In[13]:= Integrate[x^2+y^2,{x,0,a},{y,0,3x}] Out[13]= 3 a^4	$\int_0^a \int_0^{3x} \left(x^2+y^2\right)dy\,dx$
In[14]:= Integrate[xy+z,{z,0,1},{y,1,5z} ,{x,y,3y+5z}] Out[14]= 286	$\int_0^1 \int_1^{5z} \int_y^{3y+5z} \left(x^2+y^2\right)dy\,dx$
In[15]:=Integrate[xy+zw^2,{w,0,2}, {z,1,w},{y,0,z+w},{x,w,y^2+2w}] Out[15]= $\frac{37916}{315}$	$\int_0^2\int_1^w\int_0^{z+w}\int_w^{y^2+2w}\left(xy+zw^2\right)dx\,dy\,dz\,dw$

٥. المعادلات التفاضلية Differential Equations

المعادلة التفاضلية هي معادلة تربط بين المتغيرات المستقلة والدالة التابعة ومشتقات هذه الدالة ، وإذا كانت المعادلة التفاضلية تحتوى على متغير مستقل واحد فإنها تسمى معادلة تفاضلية عادية Ordinary Differential Equation (ODE) وإذا كانت المعادلة تحتوى على متغيرين مستقلين أو اكثر فإنها تسمى معادلة تفاضلية جزئية (Partial Differential Equation PDE) .

ورتبة Order المعادلة التفاضلية هى رتبة أعلى مشتقة موجودة بالمعادلة بينما درجة Degree المعادلة التفاضلية هى الأس المرفوع أليه المشتقة ذات اكبر رتبة . وفى الجدول الآتي نضع بعض الأمثلة للمعادلات التفاضلية .

Degree الدرجة	Order الرتبة	معادلات تفاضلية عادية (ODE)
الدرجة الأولى	الرتبة الأولى	$\frac{dy}{dx} = x + 5$
الدرجة الأولى	الرتبة الثانية	$\frac{d^2 y}{d x^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = x$
الدرجة الثانية	الرتبة الأولى	$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = x$
الدرجة الثانية	الرتبة الثانية	$\left(\frac{d^2 y}{d x^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3y = x^2$
الدرجة الأولى	الرتبة الثالثة	$y''' + 2(y'')^2 + y' = \cos(x)$

معادلات تفاضلية جزئية (PDE)	Order الرتبة	Degree الدرجة
$\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = f$	الرتبة الأولى	الدرجة الأولى
$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y^2$	الرتبة الثانية	الدرجة الأولى

يقال للمعادلة التفاضلية (عادية ODE أو جزئية PDE) أنها معادلة تفاضلية خطية **Linear Differential Equation** إذا كان كل متغير تابع وكذلك المشتقات الموجودة بالمعادلة جميعها من الدرجة الأولى وأيضا المعادلة التفاضلية لا تحتوى على حوا صل ضرب لمتغيرات تابعة أو مشتقات أو خليط من حاصل ضربهما ، وإذا لم تكن المعادلة التفاضلية خطية فإنها تسمى معادلة تفاضلية غير خطية ، والمعادلة التفاضلية تسمى مسألة القيمة الابتدائية **Initial Value Problem** إذا كان الحل يحقق شروط ابتدائية معطاة

ويستطيع برنامج ماثيماتيكا إيجاد حل أنواع متعددة من المعادلات التفاضلية وذلك بواسطة الأمر **Dsolve** كالآتي :

حل المعادلة التفاضلية eqn وإيجاد المتغير التابع y[x] بدلالة المتغير المستقل x

DSolve[eqn, y[x], x]

المعادلة التفاضلية بلغة الرياضيات	المعادلة التفاضلية بلغة ماثيماتيكا
$\frac{dy}{dx} = y$	In[1]:=DSolve[y'[x]==y[x],y[x],x] Out[1]={{y[x] -> E^x C[1]}}
$\frac{dy}{dx} = \cos(x)$	In[2]:=DSolve[y'[x]==Cos[x],y[x],x] Out[2]={{y[x] -> C[1] + Sin[x]}}
$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = 1$	In[3]:=DSolve[y'[x]+(1/x)y[x]==1,y[x],x] Out[3]= $\left\{\left\{y[x]->\frac{x}{2}+\frac{C[1]}{x}\right\}\right\}$
$y'' + y = x^2 - x + 2$	In[4]:=DSolve[{y''[x]+y[x]==x^2 - x+2}, y[x],x] Out[4]= {{y[x] -> -x + x^2 + C[2] Cos[x] - C[1] Sin[x]}}
$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = x^4 e^x$	In[5]:= DSolve[x^2y''[x]-2x y'[x]+2y[x] == x^4 Exp[x],y[x],x] Out[5]= {{y[x] -> x (-2 E^x + E^x x + C[1] + x C[2])}}

$$\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{d^2y}{dx^2}-4y = xe^{-2x}$$	المعادلـــة التفاضلية بلغـــــة الرياضيات
In[6]:=Dsolve[y'''[x]+3y''[x]-4y[x]==x Exp[-2x],y[x],x] Out[6]= $\left\{\left\{y[x]->-\frac{1}{18}\left(x^2+x^3\right)e^{-2x}+\left(C[1]+xC[2]\right)e^{-2x}+e^{x}C[3]\right\}\right\}$	المعادلـــة التفاضلية بلغـــــة ماثيماتيكا

$$\frac{d^4y}{dx^4}+2\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}=3e^{2x}+4\sin(x)$$	المعادلـــة التفاضلية بلغـــــة الرياضيات
In[7]:=DSolve[y''''[x]+2y'''[x]-3y''[x]==3Exp[2x]+4Sin[x],y[x],x] Out[7]= $\left\{\left\{y[x]->\frac{C[1]}{e^{3x}}+C[2]+xC[3]+e^{x}C[4]+\frac{1}{180}\left(27e^{2x}+72\,Cos[x]+144Sin[x]\right)\right\}\right\}$	المعادلـــة التفاضلية بلغـــــة ماثيماتيكا

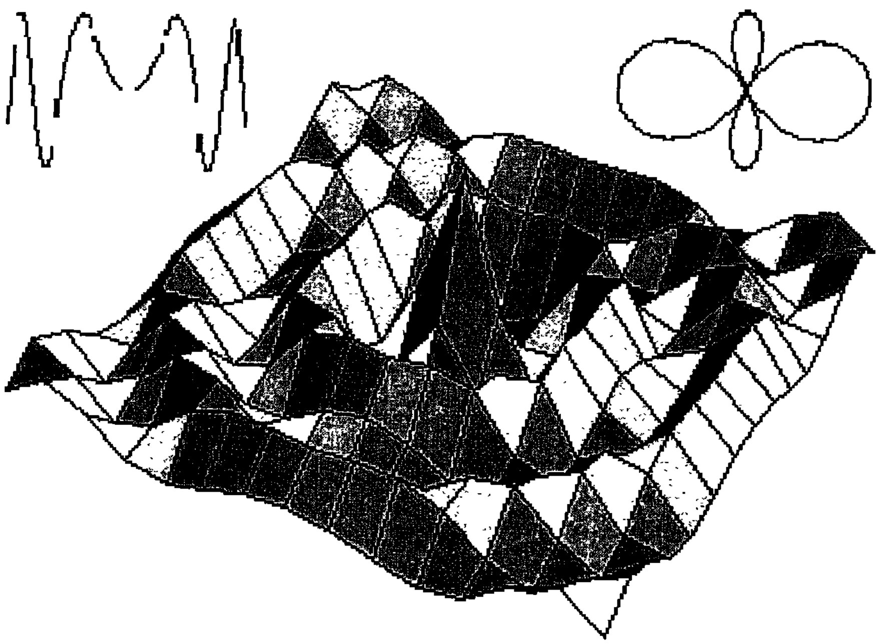
$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\left(x^2-9\right)y=0$$ Bessel Equation معادلة بيســـــــل	المعادلـــة التفاضلية بلغـــــة الرياضيات
In[8]:=DSolve[x^2y''[x]+x y'[x]+(x^2-9) y[x]==0,y[x],x] Out[8]={{y[x] -> BesselY[3, x] C[1] + BesselJ[3, x] C[2]}}	المعادلـــة التفاضلية بلغـــــة ماثيماتيكا

لحل المعادلة التفاضلية eqn والتى تحقق الشرط الابتدائى y[xo]=a

DSolve[{eqn,y[xo]==a}, y[x], x]

المعادلة التفاضلية بلغة ماثيماتيكا	المعادلة التفاضلية بلغة الرياضيات
In[9]:=DSolve[{y'[x]==y[x],y[0]=3},y[x],x] Out[9]={{y[x] ->3 E^x }}	$\frac{dy}{dx}=y \quad , \quad y[0]=3$
In[10]:= DSolve[{y'[x]==Cos[x],y[0]==2},y[x],x] Out[10]={{y[x] -> 2 + Sin[x]}}	$\frac{dy}{dx}=\cos(x) \quad , \quad y[0]=2$
In[11]:= Dsolve[{y'[x]+(2/x)y[x]==y[x], y[1]=-2},y[x],x] Out[11]= $\left\{\left\{y[x]->-Sqrt[\frac{18}{5x^4}+\frac{2x}{5}\right\}\right\}$	$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=y \quad , \quad y[1]=-2$
In[12]:= Dsolve[{y"[x] - 3y'[x]+2y[x]==Exp[x] + Exp[2x],y[0]==1,y'[0]==1},y[x],x] Out[12]={{y[x] -> E^x - E^x x + E^{2x} x}}	$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=e^x+e^{2x}$ y[0]=1 , y'[0]=1

الباب الخامس
ماثيماتيكا ورسم الدوال



فى هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكا والخاصة بالموضوعات الآتية :

١. رسم الدوال في المستوى Two-Dimensional Plotting
٢. رسم الدوال فى الفراغ Three-Dimensional Plotting
٣. رسم الدوال البارامترية Parametric Plots

الباب الخامس

ماثيماتيكا ورسم الدوال

يســـــتطيع برنامج ماثيماتيكا أداء دور كبير فى عمليات رســـــم الدوال فى المستوى والفراغ وكذلك الدوال فى الصورة البارامترية ولتنفيذ عملية رســـــم الدوال فى ماثيماتيكـــا نحتاج الى تحديد ثلاث أشياء أساسية هى :

- تعريف الدالة المطلوب رســــــمها
- تعريف المتغير المســـــــتقل **Independent variable**
- تعريف نطاق المتغير المســـــــتقل **Domain**

ويحتوى ماثيماتيكا على العديد من الاختيارات **Options** التى تتحكم فــــى شــــكل ومواصفات الرسم **graph** وبعض هذه الاختيارات يكون فعال **Default** بمعنى أن ماثيماتيكا يقوم بتنفيذها أوتوماتيك **Automatic** عند بداية التشغيل فمثلا الاختيارات

- تحديد مقياس رسم مناسب **scale**
- تحديد عدد النقط التى يتم حساب قيم الدالة عندها
- اختيار المدى **Range** للمتغير التابع **Dependent variable**
- تحديد وترقيم محاور الإحداثيات

تعتبر من الاختيارات الفعالة فى ماثيماتيكا وكل اختيار له اسم محدد ويمكـــن للمســـتخدم تغيـــير الاختيارات الفعالة فى ماثيماتيكا وإضافة آي اختيارات أخرى حسب طبيعة الرسم المطلوب .

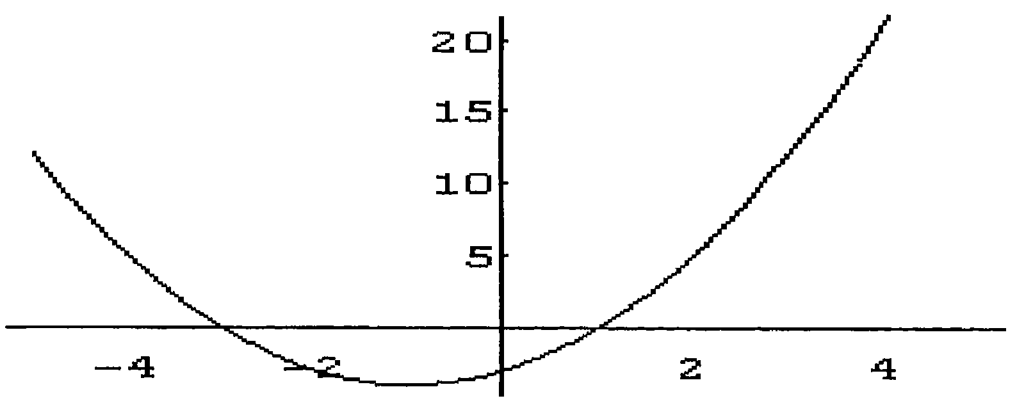
١ . رسم الدوال فى المستوى Two-Dimensional Plotting

الدالة ذات المتغير الواحد يرمز لها $y = f(x)$ حيث x يسمى بالمتغير المستقل ، y يسمى بالمتغير التابع ونطاق الدالة يقع على محور x والمدى يقع على محور y وترسم الدالة فى المستوى ويمثلها مجموعة النقط (x,y) فى المستوى التى تحقق $y = f(x)$ ، ومن أهم أوامر رسم الدوال في ماثيماتيكا هو الأمر Plot وله الصيغة العامة الآتية :

Plot[f, {x, xmin, xmax}] رسم الدالة f كدالة فى المتغير x فى النطاق من x = xmin الى x = xmax
Plot[{f1, f2, ...}, {x, xmin, xmax}] رسم مجموعة دوال ... , f1 , f2 فى المتغير x فى النطاق من x = xmin الى x = xmax

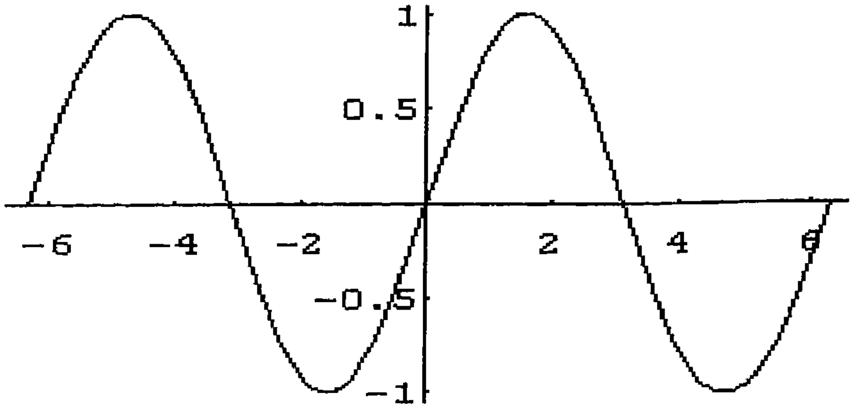
والناتج من تنفيذ أمر Plot يكون صورة مرسومة " Graphics Object " للدالة أو لمجموعة الدوال المعطاة وفقا للاختيارات الفعالة .

In[1]:=Plot[x^2+2x-3,{x,-5,5}] رسم الدالة $x^2 +2x-3$ فى الفترة [-5,5]



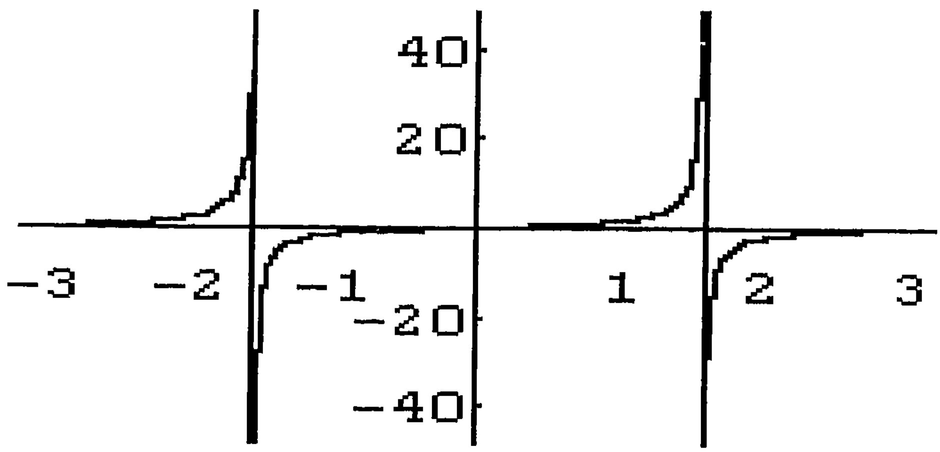
Out[1]=-Graphics-

رسم الدالة sin x فى الفترة [-2π ,2 π] In[2]:= Plot[Sin[x],{x,-2Pi,2Pi}]

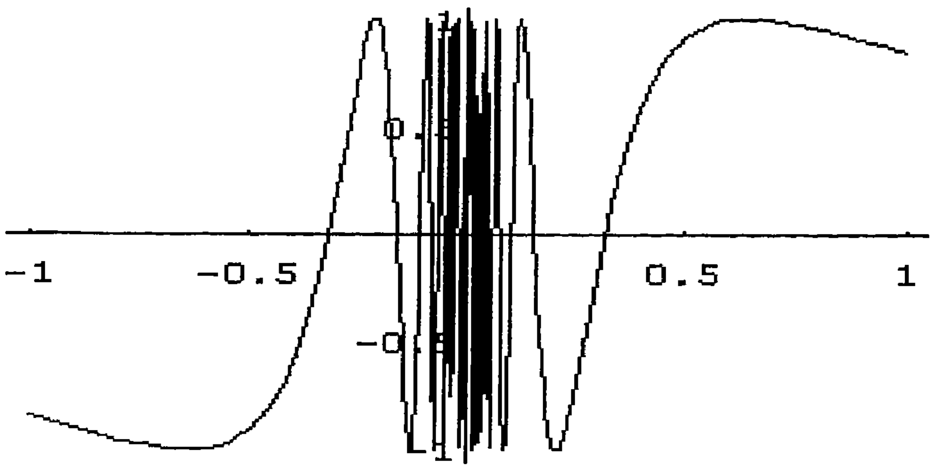


والأمر Plot فى ماثيماتيكا قادر على رســم دوال لها نقاط شــاذة فى نطــاق التعريــف حيث يقوم ماثيماتيكا باختيار مقياس رسم مناسب .

رسم الدالة Tan(x) فى الفترة [-3,3] In[3]: =Plot[Tan[x],{x,-3,3}

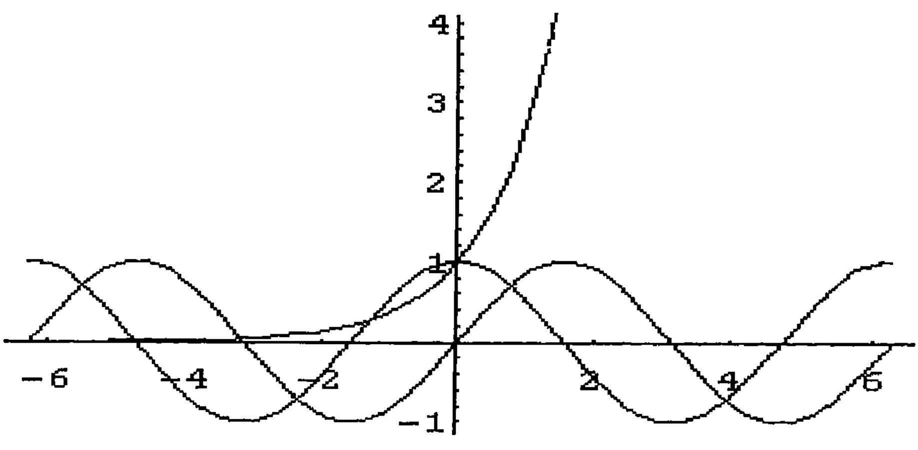


In[4]:=Plot[Sin[1/x],{x,-1,1}] الدالة sin(1/x) لها نقطة شـــاذة عند x=0



In[5]:=Plot[{Sin[x],Cos[x],Exp[x]},{x,-2Pi,2Pi}]

لرسم مجموعة من الدوال على نفس النطاق



ونلاحظ فى الأمثلة السابقة انه تم رسم الدوال بدون إضافة أي اختيارات Options الى أمر الرسم Plot بمعنى أن الرسوم تم تنفيذها بالاختيارات الفعالة default الموجودة داخل ماثيماتيكا ، ولكن كان من الممكن إضافة أي اختيارات للرسم حيث أن كل اختيار له اسم Name ويأخذ قيمة Value ويتم وضع الاختيار Option داخل أمر الرسم Plot فى صورة قاعدة

Name -> Value

ويمكن وضع اكثر من اختيار داخل أمر الرسم Plot بحيث يفصل كل منها علامة الفاصلة "," ومن القيم Value المستخدمة فى هذه الاختيارات

Automatic	وتعنى أن يتم الاختيار اتوماتيك وفقا لأسلوب ماثيماتيكا
All	وتعنى عمل كل ما هو متاح من ماثيماتيكا فى هذا الاختيار
None	وتعنى عدم استخدام ما هو متاح من ماثيماتيكا فى هذا الاختيار
True	وتعنى تنفيذ الاختيار
False	وتعنى عدم تنفيذ الاختيار

وفى حالة عدم تحديد قيمة خاصة لاختيار ما للأمر Plot فإن ماثيماتيكا يقوم أوتوماتيك باستخدام القيمة الفعالة لهذا الاختيار وبصفة عامة يمكن الاستعلام عن القيم الفعالة للاختيارات المتاحة لدالة function باستخدام الأمر Option فى الصورة

Option[function]

للتعرف على القيم الفعالة للاختيارات الخاصة بالأمر Plot **In[6]:=Option[Plot]**

Out[6]={ AspectRatio -> GoldenRatio^(-1) , Axes -> Automatic , AxesLabel -> None, AxesOrigin -> Automatic, AxesStyle -> Automatic, Background -> Automatic ColorOutput -> Automatic, Compiled -> True, DefaultColor -> Automatic, Epilog -> {}, Frame -> False, FrameLabel -> None, FrameStyle -> Automatic, FrameTicks -> Automatic, GridLines -> None, MaxBend -> 10. PlotDivision>20., PlotLabel -> None, PlotPoints -> 25, PlotRange -> Automatic, PlotRegion -> Automatic, PlotStyle -> Automatic, Prolog -> {}, RotateLabel -> True, Ticks -> Automatic, DefaultFont :> $DefaultFont, DisplayFunction :> $DisplayFunction }

وإذا تم تحديد قيم خاصة لاختيارات دالة **function** وأردنا استخدام هذه القيم الجديدة اكثر من مرة بعد ذلك فإنه يمكن جعلها قيم فعالة باستخدام الأمر **SetOptions** في الصورة

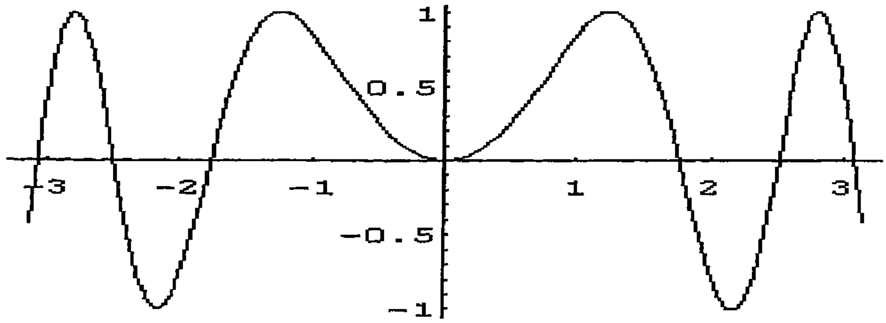
```
SetOptions[function,Name1->value1,Name2->value2,...]
```

وسوف نتعرف الآن على بعض الاختيارات **Options** المستخدمة مع الأمر **Plot** والقيم الفعالة لكل منها وقيم أخرى بديلة للتحكم في مواصفات الرسم وكيفية تغيرها .

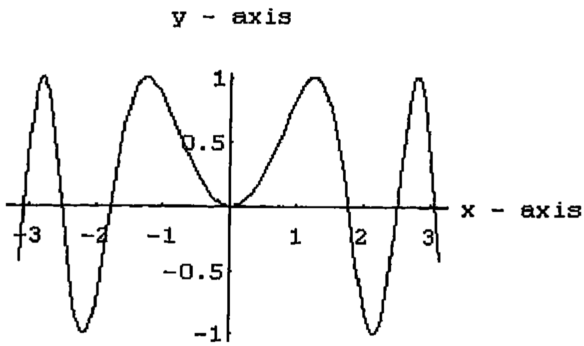
Option Name اسم الاختيار Default value وقيمته الفعالة	وظيفة الاختيار	قيم أخرى للاختيار Another values
PlotRange -> Automatic	تحديد مدى الإحداثيات التي يتم التعامل معها في الرسم	PlotRange -> {ymin,ymax} PlotRange>{{xmin,xmax},{ymin,ymax}} PlotRange -> All
PlotLabel -> None	كتابة عنوان على الرسم	PlotLabel -> "expr" حيث "expr" تعنى أي عنوان يتم كتابته على الرسم
Frame -> False	إمكانية عمل إطار حول الرسم	عمل إطار حول الرسم Frame -> True
FrameLabel -> None	إمكانية كتابة عنوان على الإطار حول الرسم	FrameLabel ->"graph(1)" كتابة العنوان graph(1) على الإطار حول الرسم
AxesOrigin -> Automatic	تحديد نقطة الأصل	AxesOrigin -> {x0,y0} تحديد النقطة (x0,y0) كنقطة اصل
Axes -> Automatic	رسم محاور الإحداثيات	Axes -> None عدم رسم محاور للإحداثيات
AxesLabel -> None	كتابة عناوين على المحاور	AxesLabel -> {"y-axes"} كتابة العنوان y-axes على محور y فقط AxesLabel -> { "x-label", "y-label"} كتابة العنوان x-label على محور x والعنوان y-label على محور y
GradLines -> None	لعمل رسم شبكي يحتوى بداخله على رسم الدالة	GradLines -> Automatic

Option Name اسم الاختيار Default value وقيمته الفعالة	وظيفة الاختيار	قيــــــم أخرى للاختيار Another values
AspectRatio -> $\frac{1}{\text{GoldenRatio}}$ حيث GoldenRatio ≅ 1.61803	تمثل نسبة واجهـــة الرسم وهى النســبة بين ارتفاع وعــرض الرسم	AspectRatio-> Automatic AspectRatio->n اختيار عدد n يمثل النسبة بـين ارتفــاع وعرض منطقة الرسم
Ticks -> Automatic	ترقيــــم محـــاور الإحداثيات	Ticks -> None عدم ترقيم المحاور Ticks -> {Automatic,None} ترقيم محور x فقط Ticks -> { None,Automatic} ترقيم محور y فقط
Plot Points -> 25	اختيار عدد n يمثل عدد النقط فى العينة والتى يتم حســاب قيم الدالة عندها	Plot Points -> n
MaxBend -> 10	اختيارعدد n يمثــل اكبر زاوية التواء بين القطع المتعاقبة علــى المنحنى	MaxBend -> n
PlotDivison -> 20	اكبر معامل يتم بـــه تقسيم الفترةالمعطــاة الى فترات جزئية	PlotDivison -> n اختيار عدد n يمثل اكبر تقســيم ممكن من الفترات الجزئية للفترة المعطاة
Background -> Automatic	اختيار لون خلفيـــة الرسم	Background -> GrayLevel[x] جعل الخلفية باللون الرمادى بمستوى تلوين x يتراوح بين 0,1
DisplayFunction-> $DisplayFunction	إظهار رسم الدالة	DisplayFunction-> Identity منع ظهور رسم الدالة

In[7]:= Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi}] رسم الدالة $\sin x^2$ فى الفترة $[-\pi,\pi]$

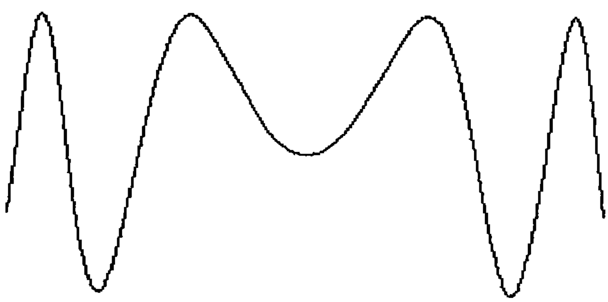


In[8]:=Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi}, AxesLabel->{"x - axis","y - axis"}]



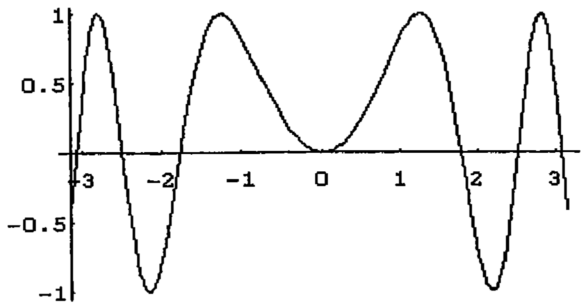
ولوضع العنوان " x - axis " على المحور الأفقي والعنـــوان " y - axis" على المحور الرأسي

In[9]:= Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},Axes->None]



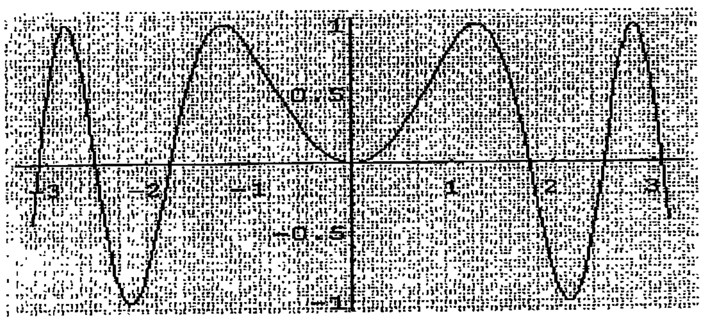
رسم الدالة $\sin x^2$ فى الفترة $[-\pi,\pi]$ وحذف المحاور من الرسم

In[10]:=Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi}, AxesOrigin->{-Pi,0}]



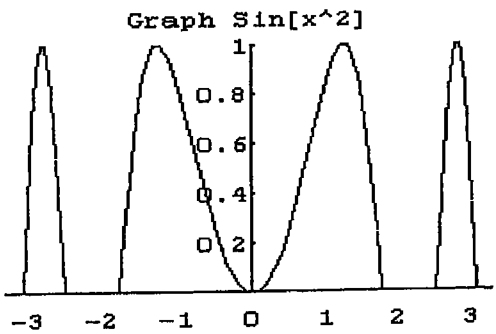
لرسم الدالة $\sin x^2$ في الفترة $[-\pi,\pi]$ وجعل نقطة الأصل هى النقطة $(-\pi,0)$

In[11]:=Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},Background->GrayLevel[0.5]]



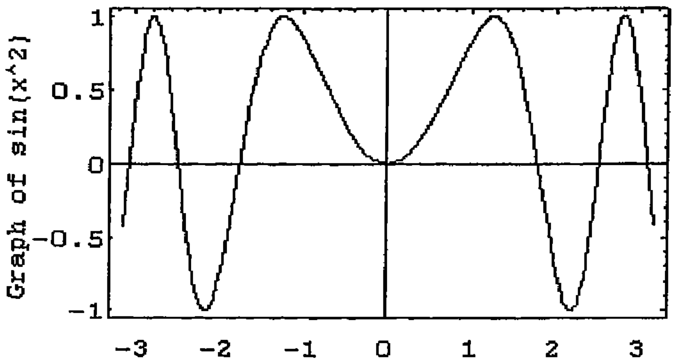
لرسم الدالة $\sin x^2$ فى الفترة $[-\pi,\pi]$ مع جعل خلفية الرسم باللون الرمادى

**In[12]:=Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},PlotRange->{0,1},
PlotLabel->"Graph Sin[x^2]"]**



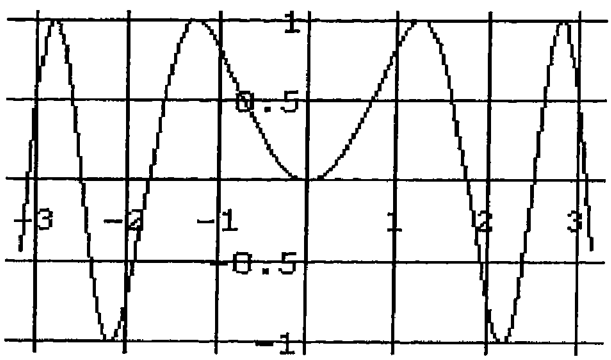
لرسم الدالة $\sin x^2$ فى الفترة $[-\pi,\pi]$ وفى المدى من 0 الى 1 وكتابة عنوان على الرسم

```
In[13]:= Plot[ Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},Frame->True,
            FrameLabel->"Graph of sin(x^2)" ]
```



رسم الدالة $\sin x^2$ في الفترة $[-\pi,\pi]$ مع عمل إطار خارجي حول الرسم وكتابة عنوان على هذا الإطار

```
In[14]:=Plot[ Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},GridLines->Automatic]
```



رسم الدالة $\sin x^2$ في الفترة $[-\pi,\pi]$ مع عمل خطوط شبكية على الرسم

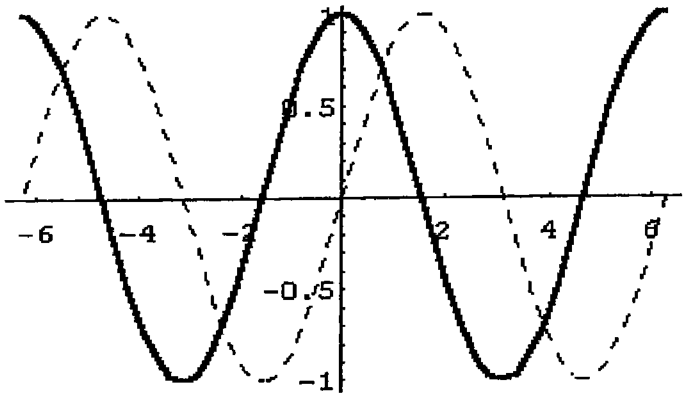
وفي برنامج ماثيماتيكا يمكن استخدام الرسوم الأولية في توضيح النقط والخطوط والمنحنيات بأساليب مختلفة **different styles** ويتم ذلك بواسطة الاختيار **PlotStyle** مع الأمر **Plot** وقيمته الفعالة **Automatic** ويمكن إعطاء قيم أخرى للاختيار **PlotStyle** كالآتي :

PlotStyle->style تحديد الأسلوب **style** لرسم جميع المنحنيات للدوال الموجودة بالأمر **Plot**
PlotStyle->{{style1},{style2},...} تحديد الأساليب **...,style1, style2** للاستخدام بصورة دورية مع منحنيات الدوال الموجودة فى الأمر **Plot** فمنحنى الدالة الأولى يرسم بالأسلوب **style1** ومنحنى الدالة الثانية يرسم بالأسلوب **style2** ... الخ

ونعرض الآن بعض الأساليب **styles** الموجودة في ماثيماتيكا ووظيفة كلا منها .

الأسلوب style	الوظيفة
Thickness[x]	رسم المنحنى بحيث يكون سمك الخط المستخدم يساوى x حيث x تمثل كسر من العرض الكلى للرسم فمثلا لجعل الخط كثيف **Thickness[0.05]**
Dashing[{d}]	رسم المنحنى متقطع بأجزاء متعاقبة طولها d حيث d تمثل كسر من العرض الكلى للرسم ، فمثلا لرسم المنحنى متقطع بالصورة --- يكتب **Dashing[{0.25}]**
Dashing[{d1,d2,d3,...}]	رسم المنحنى متقطع بأجزاء متعاقبة طولها **d1,d2,...** وبصورة دورية حيث كلا من **di** يمثل كسر من العرض الكلى للرسم
GrayLevel[x]	رسم المنحنى باللون الرمادى بمستوى تلوين x يتراوح بين 0 , 1 حيث لون اسود **black** **GrayLevel[0]** لون ابيض **white** **GrayLevel[1]** لون رمادى **gray** **GrayLevel[0.5]**
RGBColor[r,g,b]	رسم المنحنى ملون حيث **r,g,b** تمثل الألوان الأحمر **red** والأخضر **green** والأزرق **blue** على الترتيب وكل منها يأخذ قيم بين 0 , 1 وفقا لدرجة اللون المطلوب

```
In[15]:= Plot[{Sin[x],Cos[x]},{x,-2Pi,2Pi},
          PlotStyle->{Dashing[{0.02}],Thickness[0.007]}]
```



رسم منحنى الدالتين

sin x , cos x

على نفس النطـــاق

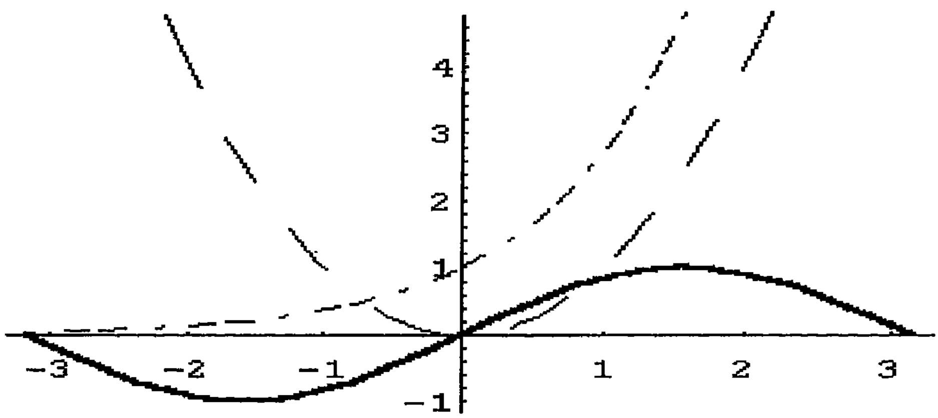
$[-2\pi,2\pi]$

وبحيث يكون منحنـــى

sin x متقطع ومنحنى

cos x سميك

```
In[16]:=Plot[{x^2,Sin[x],Exp[x]},{x,-Pi,Pi},PlotStyle->{{Dashing[{0.08}]},
          {Thickness[0.007]},{Dashing[{0.01,0.03,0.03}]}}]
```



رسم الدالة x^2 على صورة خطوط متقطعة ———

ورسم الدالة sin x بخط سميك

ورسم الدالة e^x على صورة خطوط متقطعة ونقط ——.——

والدوال الثلاثة مرسومة على نفس النطاق

ويمكن استخدام الرسوم الأولية graphics primitives لتحديد شكل محاور الإحداثيات في الرسم الناتج ويتم ذلك باستخدام الاختيار AxesStyle مع أمر الرسم Plot وقيمته الفعالة Automatic ويمكن إعطاء قيم أخرى للاختيار AxesStyle كالآتي :

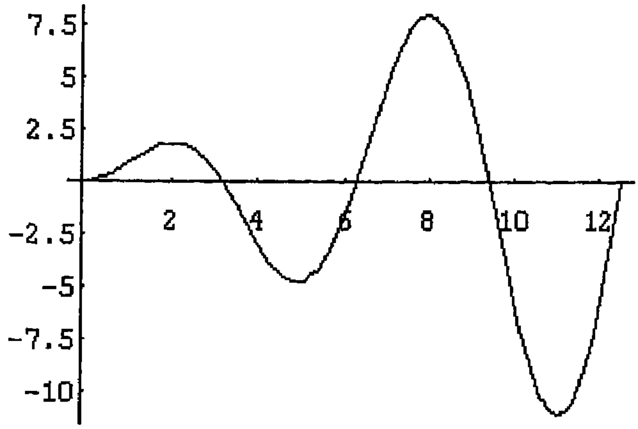
AxesStyle ->style تحديد الأسلوب style في رسم محاور الإحداثيات
AxesStyle ->{{stylex},{styley}} تحديد الأسلوب stylex في رسم محور x والأسلوب styley في رسم محور y

ويمكن أيضا استخدام الرسوم الأولية graphics primitives لتحديد شكل الإطار المرسوم حول الرسم ويتم ذلك باستخدام الاختيار FrameStyle مع أمر الرسم Plot وقيمته الفعالة Automatic ويمكن إعطاء قيم أخرى للاختيار FrameStyle كالآتي :

FrameStyle ->style تحديد الأسلوب style في رسم الأوجه الأربعة للإطار .
FrameStyle ->{{xpstyle},{ypstyle},{ xnstyle},{ynstyle}} تحديد أربعة أساليب لرسم الأوجه الأربعة للإطار مبتدأ من الوجه الأفقي السفلي ويرسم بالأسلوب xpstylex والأوجه الباقية ترسم بالأساليب الباقية حسب دوران عقارب الساعة

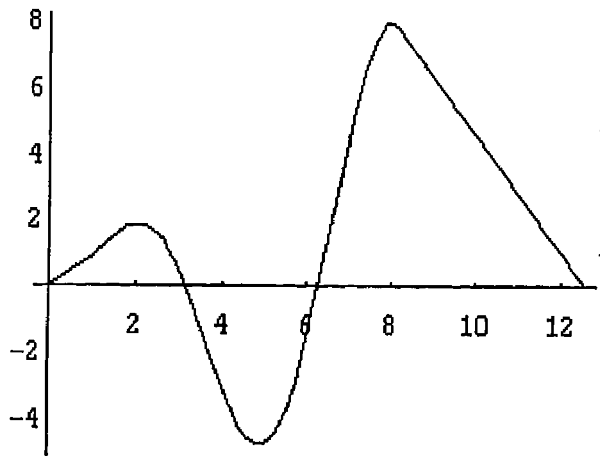
وفي ماثيماتيكا يقوم الأمر Plot في البداية بحساب قيم الدالة عند عينة من النقط المتساوية البعد ويتم تحديد عدد النقط في العينة بواسطة الاختيار PlotPoints وقيمته الابتدائية الفعالة هي 25 ثم يقوم الأمر Plot بعد ذلك بأخذ عينات إضافية من النقط لعمل منحنى بحيث تكون زاوية الالتواء bend بين الأجزاء المتعاقبة على المنحنى اقل من القيمة الابتدائية الفعالة الموجودة في الاختيار MaxBend وهي 10 ويتم تقسيم الفترة المعطاة الى فترات جزئية عددها (على الأكثر) يساوى القيمة الابتدائية الفعالة الموجودة في الاختيار PlotDivision وهي 20 . ويجب مراعاةانه إذا استخدمنا عدد صغير من النقط في العينة فإن رسم المنحنى قد يبدو غير مكتمل ويمكن التحقق من ذلك عن طريق زيادة عدد نقط العينة في الاختيار PlotPoints .

```
In[17]:= p1=Plot[x Sin[x],{x,0,4Pi},PlotPoints->30]
```



عند اخــــذ 30 نقطة فى العينة
فى الاختيار PlotPoints
فإن رسم الدالة x sin x
يكون كما هو موضح بالشكل

```
In[18]:= p2=Plot[x Sin[x],{x,0,4Pi},PlotPoints->4]
```



عند اخــــــذ 4 نقط فقط فى العينة
فى الاختيار PlotPoints
فإن رسم الدالة x sin x يبدو
غير مكتمل كما هو موضح بالشكل

ويمكن التعرف على المعلومات التى يقوم ماثيماتيكا بحسابها عند تنفيذ أمر Plot لرسم الدالـــة وذلك باستخدام الأمر InputForm فى الصورة

للتعرف على البيانات التي ينفذها ماثيماتيكا على expr	InputForm [expr]

فمثلا للتعرف على البيانات التى ينفذها ماثيماتيكا على الرسم p2 فى جملة الإدخال الســـابقة يرسل الأمر

InputForm [p2]

وبرنامج ماثيماتيكا يقوم بحفظ المعلومات الخاصة بكل رسم يتم تنفيذه بحيث يمكن إعادة الرسم فى آي وقت بعد ذلك مع إمكانية تغيير بعض الاختيارات المستخدمة وذلك للنظـــر الى الرســـم بطرق مختلفة كما يمكن عرض اكثر من رسم معا ويتم ذلك باستخدام الأمر Show كالآتي :

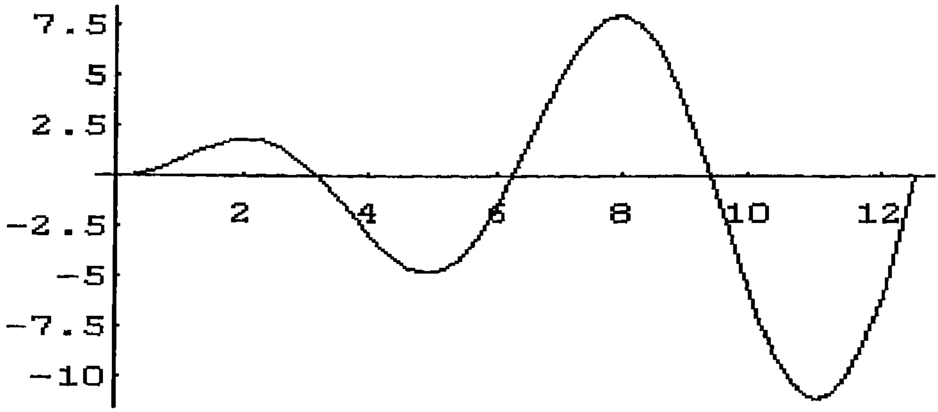
Show[p1]	إعادة عرض الرسم p1 الناتج من Plot
Show[p1,option->value]	إعادة عرض الرسم p1 الناتج من Plot مع تنفيذ الاختيار Option -> value
Show[plot1,plot2,...]	إعادة عرض رسم المنحنيات p1,p2,... الناتجة من Plot معا في رسم واحد

وفى أمر إعادة الرسم Show يمكن استخدام اختيارات الأمر Plot ما عدا الاختيارات التى تغير من طبيعة وعدد النقط فى العينة المستخدمة لرسم الدالة مثل الاختيارات

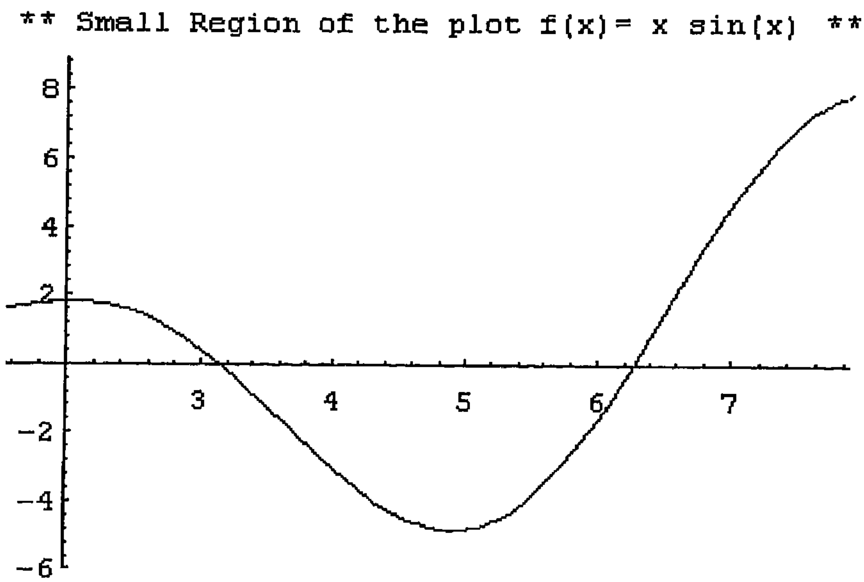
PlotStyle , PlotPoints , MaxBand , PlotDivision

والأمثلة الآتية توضح ذلك .

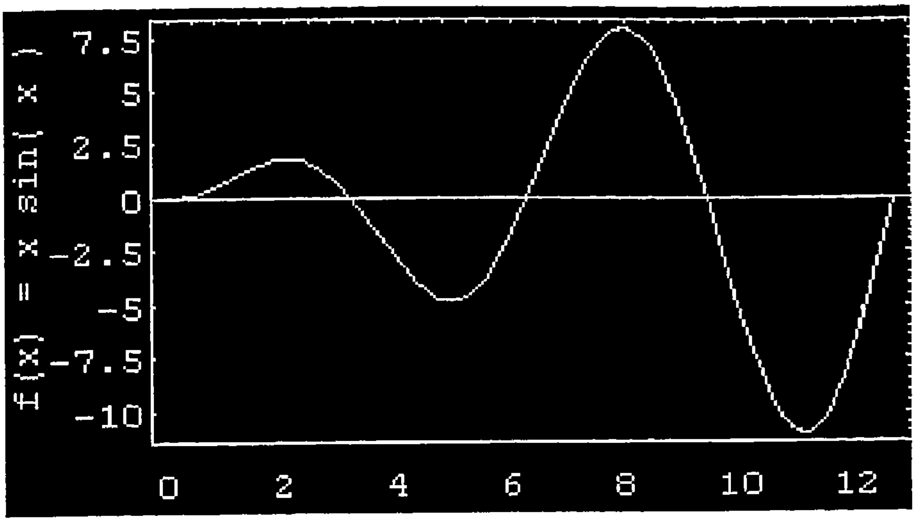
In[19]:= p3=Plot[x Sin[x],{x,0,4Pi}]



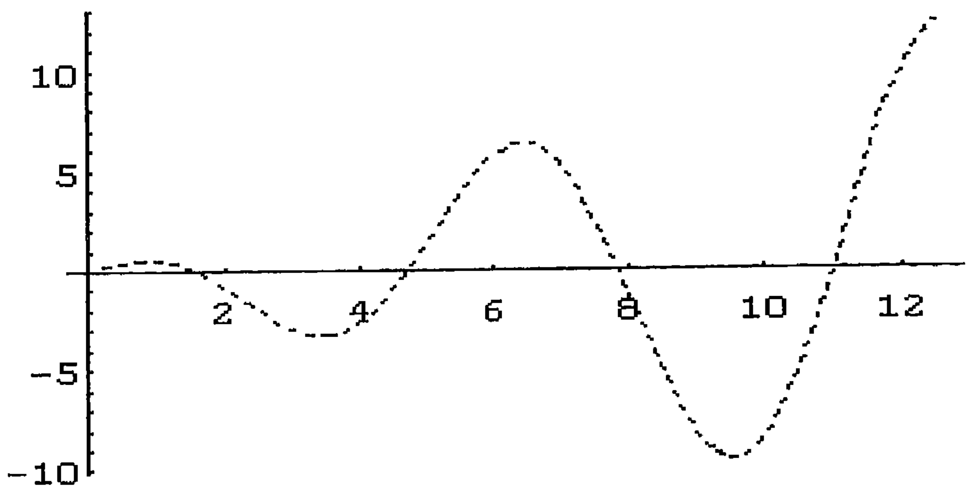
**In[20]:= Show[p3,PlotRange->{{Pi/2,5Pi/2},{-6,9}},
PlotLabel->" ** Small Region of the plot f(x)= x sin(x) **"]**



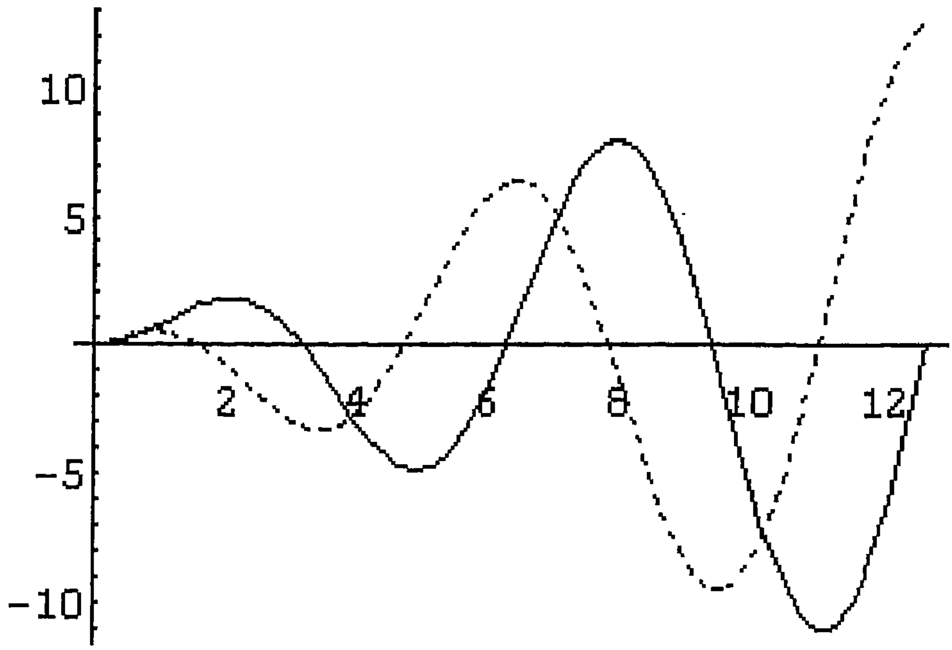
In[21]:= Show[p3,Frame->True,FrameLabel->" f(x) = x sin(x)",
Background->GrayLevel0]]



In[22]:=p4=Plot[x Cos[x],{x,0,4Pi},PlotStyle->Dashing[{0.01}]]



In[23]:= Show[p3,p4]



وفى برنامج ماثيماتيكا فإن جميع الرسوم الناتجة من الأمر **Plot** يتم تكوينها من قوائم من الرسوم الأولية **graphics primitives** المناسبة والموجودة داخل بنـــاء ماثيماتيكـــا وبعد ذلك يتم عرضها بالصـــورة التى نراها

والجدول التالي يوضح بعض الرسوم الأولية الموجودة داخل بناء ماثيماتيكا .

Graphics Primitives الرسوم الأولية	الناتج
Point[{x,y}]	رسم نقطة فى المستوى لها الإحداثيات (x,y)
Line[{{x1,y1},{x2,y2}}]	رسم خط مستقيم يمر بالنقطتين (x1,y1) , (x2,y2)
Line[{{x1,y1},{x2,y2},{x3,y3},...}]	رسم خط منكسر يمر بالنقط المعطاة على الترتيب
Rectangle[{xmin,ymin},{xmax,ymax}]	رسم مستطيل إحداثيات رؤوسه على أحد القطرين هى (xmin,ymin) , (xmax,ymax)
Polygon[{{x1,y1},{x2,y2},...}]	رسم شكل كثير الأضلاع له الرؤوس المعطاة
Circle[{h,k},r]	رسم دائرة مركزها النقطة (h,k) ونصف قطرها r
Circle[{h,k},{rx,ry}]	رسم قطع ناقص مركزه النقطة (h,k) وطول الجزء المقطوع من محور x يساوى rx وطول الجزء المقطوع من محور y يساوى ry
Circle[{h,k},r,{t1,t2}]]	رسم قطاع من دائرة مركزها النقطة (h,k) ونصف قطرها r والقطاع يمتد من الزاوية t1 الى الزاوية t2 حيث الزوايا مقاسه بالتقدير الدائرى واتجاهها ضد دوران عقرب الساعة

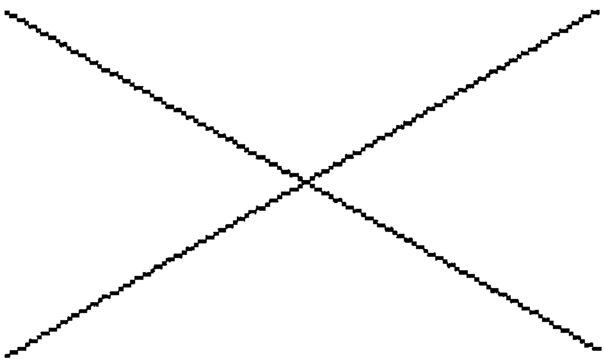
Graphics Primitives الرسوم الأولية	الناتـــــــــج
Disk[{h,k},r]	رسم قرص دائرى ممتلئ مركزه النقطـــة (h,k) ونصف قطره r
Disk[{h,k},{rx,ry}]	رسم قرص ممتلئ على هيئة قطع نـــاقص مركـــزه النقطة (h,k) وطول الجزء المقطوع من محـــور x يساوى rx وطول الجزء المقطوع مـــن محـــور y يساوى ry
Disk[{h,k},r,{t1,t2}]]	رسم قطاع من قرص دائرى ممتلئ مركزه النقطـــة (h,k) ونصف قطره r والقطاع يمتد من الزاويـــة t1 الى الزاوية t2 حيث الزوايا مقاســـه بـــالتقدير الدائرى واتجاهها ضد دوران عقرب الساعة
Text[expr,{x,y}]	كتابة النص expr متمركزا عند النقطة (x,y)
GrayLevel[i]	عرض الأشياء التالية له باللون الرمادى بمســـتوى تلوين i يتراوح بين 0 , 1
RGBCdor[r,g,b]	عرض الأشياء التالية له ملونة بمســـتوى تلويـــن يتراوح بين 0 , 1 للون الأحمر r والأخضـــر g والأزرق b
PintSize[s]	رسم النقطة التالية فى الأمر Plot كمناطق دائرية نصف قطرها s حيث s تمثل كسر مـــن العـــرض الكلى للرسم
Thickness[t]	رسم الخطوط بسمك t حيث t تمثل كسر مـــن العرض الكلى للرسم
Dashing[{d1,d2,...}]	رسم الخطوط على صورة أجزاء متقطعة أطوالهـــا d1,d2,... على التتابع حيث di تمثل كسر مـــن العرض الكلى للرسم

ويمكن للمستخدم التعامل مباشرة مع الرسوم الأولية باستخدام الأمر Graphics كالآتي :

Graphics[primitives,options]
Graphics[{primitive1,primitive2,...}]

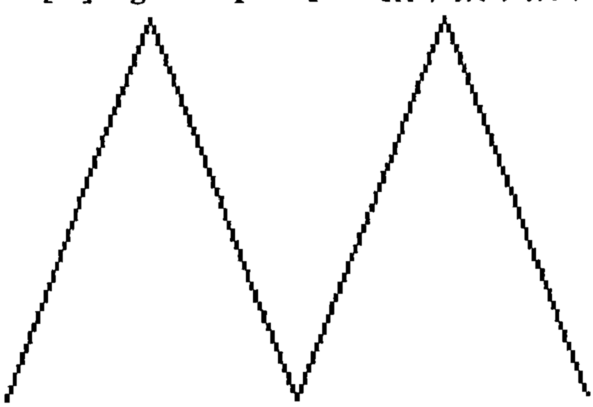
وناتج تنفيذ الأمر Graphics يكون رسالة على الصورة – Graphics – بدون ظهـــور الرسم ويتم إظهار الرسم باستخدام الأمر Show .

In[24]:= g1=Graphics[{Line[{{-1,-1},{1,1}}],Line[{{-1,1},{1,-1}}]}]; Show[g1]



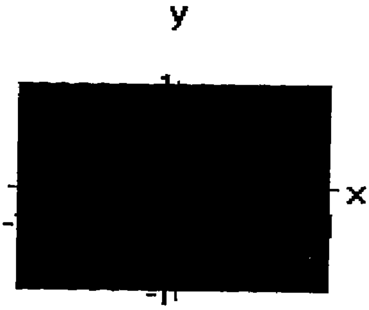
استخدام الأمر Graphics في رسم خط مســـتقيم يصل بين النقطتين (1,1) , (-1,-1) وخط مستقيم يصـــل بين النقطتين (1,-1) , (-1,1) ثم إظهار الرسم باستخدام الأمر Show

In[25]:= g2=Graphics[Line[{{0,0},{1,1},{2,0},{3,1},{4,0}}]];Show[g2]



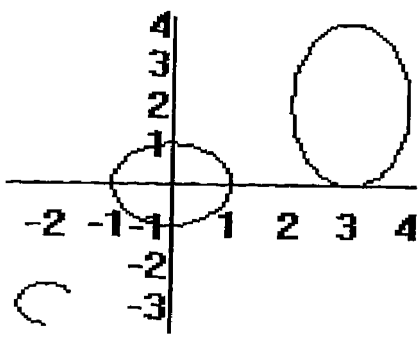
استخدام الأمر Graphics في رسم خطوط منكسرة تصل النقط المعطاة (0,0),(1,1),(2,0) ,(3,1),(4,0) على الترتيب ثم إظهار الرســـم باستخدام الأمر Show

```
In[26]:= g3=Show[Graphics[Rectangle[{-1,-1},{1,1}]],
            Axes->True,AxesLabel->{"x","y"}]
```



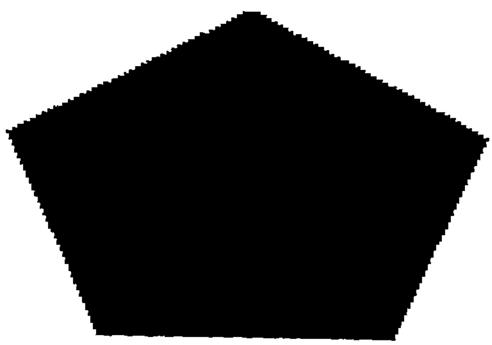
رســـــم مســـــتطيل إحداثيات رؤوس قطر فيه هى (1,1) , (-1,-1) وتم إضافة اختيـــــار عمل محـــاور وكتابة العنوان x على المحـــــور الأفقي والعنوان y على الراسي

```
In[27]:=one=Graphics[Circle[{0,0},1]];two=Graphics[Circle[{3,2},{1,2}]];
    three=Graphics[Circle[{-2,-3},.5,{Pi/4,3Pi/2}]];
    Show[one,two,three,Axes->True,AspectRatio->1]
```



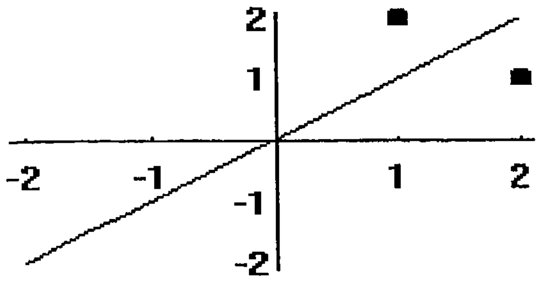
رسم دائرة مركزها النقطة (0,0) ونصف قطرها 1 وقطع ناقص مركزه النقطة (3,2) وقطاع من دائرة مركزها النقطة (-2,-3) وممتد من الزاوية Pi/4 الى الزاوية 3Pi/2 ثم إظهار الرسوم الثلاثة معا باستخدام الأمر Show

```
In[28]:= pentagon=Table[N[{Sin[2 n Pi/5],Cos[2 n Pi/5]}],{n,5}];
            Show[Graphics[Polygon[pentagon]]]
```



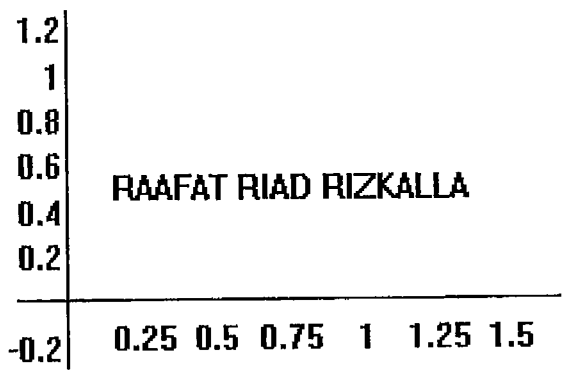
عمل قائمة pentagon تحتوى على إحداثيات الشكل الخماسي ثم إظهار الرسم باستخدام الأمر Show

```
In[29]:= Show[Graphics[{Line[{{-2,-2},{2,2}}],PointSize[0.03],
              Point[{2,1}],Point[{1,2}]}],Axes->True]
```



إظهار رسم الخط المستقيم الواصل بين النقطتين (2,2) , (-2,-2) مع رسم نقط بالحجم 0.03 عند الإحداثيات (2,1) , (1,2)

```
In[30]:= text1=Graphics[Text[RAAFAT RIAD RIZKALLA, {0.75,0.5}]];
              Show[text1,Axes->True]
```



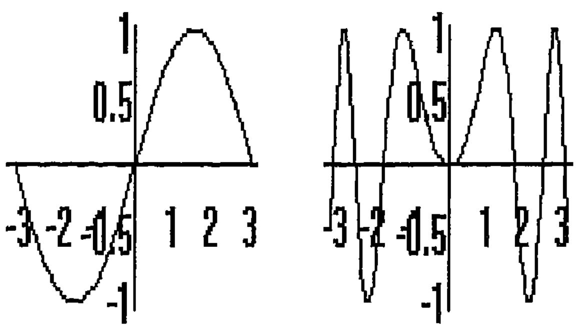
كتابة النص **RAAFAT RIAD RIZKALLA** متمركزا عند النقطة (0.75,0.5)

وفي ماثيماتيكا يمكن تكوين مصفوفة من أي بعد عناصرها أشكال مرسومة وذلك باستخدام الأمر **GraphicsArray** كالآتي :

GraphicsArray[{graph1,graph2,...}] عمل صف من الأشكال المرسومة **graph1,graph2,...**	
GraphicsArray[{graph11,graph12,...}, {graph21,graph22,...},...] عمل مصفوفة من الأشكال المرسومة الصف الأول به الرسوم **graph11,graph12,...** والصف الثانى به الرسوم **graph21,graph22,...**	

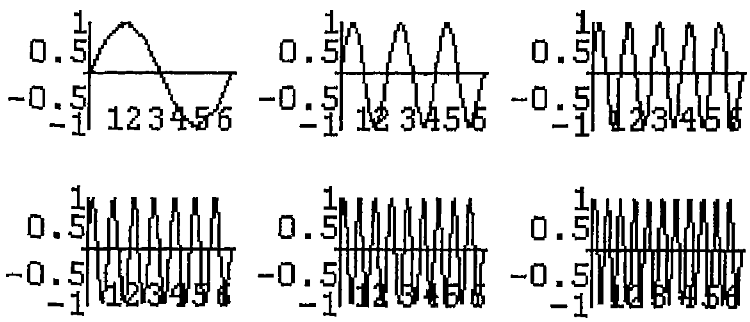
والأشكال المرسومة داخل المصفوفة **GraphicsArray** يتم عرضها بواسطة الأمــــر **Show** حيث تظهر الرسوم فى مناطق مستطيلة مرتبة فى صفوف ومع الأمر **GraphicsArray** يمكن إضافة اختيارات الأمر **Plot** بالإضافة الى الاختيار **GraphicsSpacing** وقيمته الفعالة **0.1** وهو يستخدم للتحكم فى الفراغ بين مناطق الرسم المستطيلة المرسوم داخلها عناصر المصفوفة .

```
In[31]:= p1one=Plot[Sin[x],{x,-Pi,Pi},DisplayFunction->Identity];
         p2two=Plot[Sin[x^2],{x,-Pi,Pi},DisplayFunction->Identity];
         Show[GraphicsArray[{p1one,p2two}]]
```



رســم الدالة **sin x**
ورسم الدالة $\sin x^2$
ووضع الناتج فى مصفوفة
على صورة صف واحد ثم
إظهار رسم الدالتين معا

```
In[32]:= psin[n_]:=Plot[Sin[n x],{x,0,2Pi},DisplayFunction->Identity];
                   a=Partition[Table[psin[n],{n,1,11,2}],3];
                   Show[GraphicsArray[a]]
```



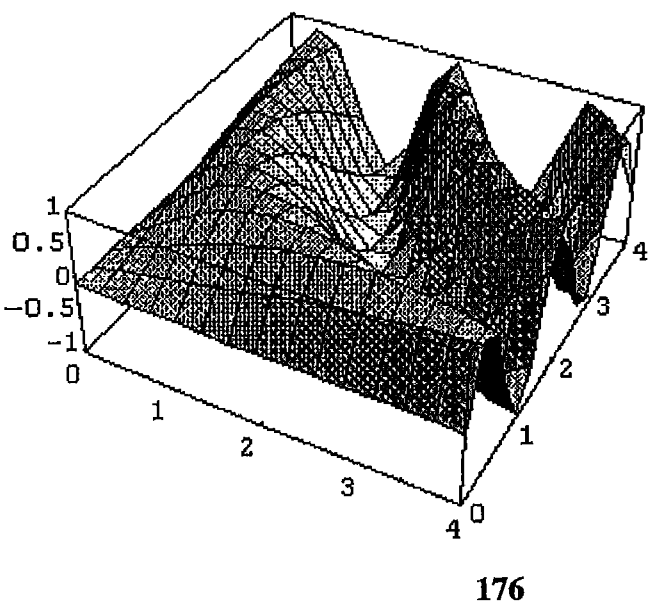
رسم الدالة **Sin(nx)** فى النطاق $[0,2\pi]$ وذلك لقيم **n = 1,3,5,7,9,11**
ثم وضع الرسوم فى مصفوفة وعرضها فى صفين بحيث يحتوى كل صف على ثلاثة رسوم

٢. رسم الدوال فى الفراغ Three-Dimensional Plotting

الدالة فى متغيرين يرمز لها z=f(x,y) حيث x,y متغيرات مستقلة , z متغير تابع ونطاق الدالة f(x,y) يقع فى المستوى xy ويمثله مجموعة النقط (x,y) المعرف عندها الدالة بينما مدى الدالة f(x,y) يقع على محور z فى الفراغ ورسم الدالة z = f(x,y) هو عبارة عن سطح فى الفراغ يمثله مجموعة النقط (x,y,z) التى تحقق المعادلة z = f(x,y) . وفى ماثيماتيكا يمكن رسم الدوال فى الفراغ باستخدام الأمر Plot3D كالآتي :

Plot3D[f, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}]

In[1]:=Plot3D[Sin[x y],{x,0,4},{y,0,4}]



رسم الدالة

Sin (x y)

على المنطقة المستطيلة الشكل

$0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 4$

وكما في حالة الأمر Plot للرسم في المستوى فإنه يوجد العديد من الاختيارات التي تتحكم في شكل الرسم في الفراغ ويمكن الاستعلام عن الاختيارات الفعالة للأمر Plot3Dباستخدام الأمر Options كالآتي :

In[2]:=Options[Plot3D]

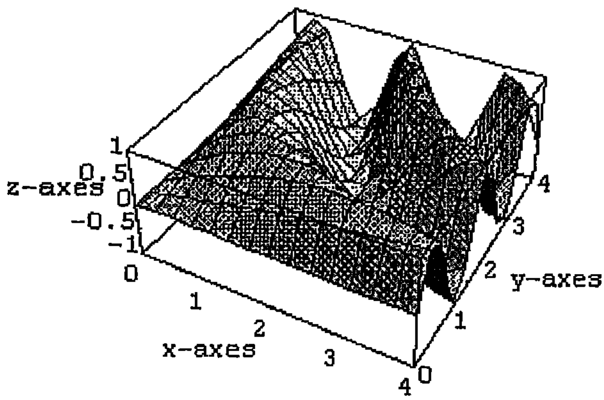
{AmbientLight -> GrayLevel[0], AspectRatio -> Automatic, Axes -> True, AxesEdge -> Automatic, AxesLabel -> None, AxesStyle -> Automatic, Background -> Automatic, Boxed -> True, BoxRatios -> {1, 1, 0.4},. BoxStyle -> Automatic, ClipFill -> Automatic, ColorFunction -> Automatic, ColorOutput -> Automatic, Compiled -> True, DefaultColor -> Automatic, Epilog -> {}, FaceGrids -> None, HiddenSurface -> True, Lighting -> True, LightSources -> {{{1., 0., 1.}, RGBColor[1, 0, 0]}, {{1., 1., 1.}, RGBColor[0, 1, 0]}, {{0., 1., 1.}, RGBColor[0, 0, 1]}}, Mesh -> True, MeshStyle -> Automatic, PlotLabel -> None, PlotPoints -> 15, PlotRange -> Automatic, PlotRegion -> Automatic, Plot3Matrix -> Automatic, Prolog -> {}, Shading -> True, SphericalRegion -> False, Ticks -> Automatic, ViewCenter -> Automatic, ViewPoint -> {1.3, -2.4, 2.}, ViewVertical -> {0., 0., 1.}, DefaultFont :> $DefaultFont, DisplayFunction :> $DisplayFunction}

والآن نعرض بالتفصيل بعض الاختيارات المستخدمة مع الأمر Plot3D والقيمة الفعالة لكل منها بالإضافة الى قيم أخرى بديلة للتحكم في مواصفات الرسم في الفراغ وهذه الاختيارات يمكن استخدامها أيضا مع أمر إعادة الرسم Show .

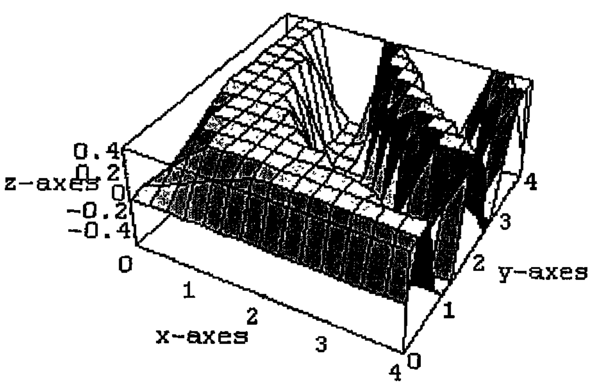
Option Name اسم الاختيار Default value وقيمته الفعالة	وظيفة الاختيار	قيم أخرى للاختيار
Axes->True	رسم محاور الإحداثيات x , y , z	**Axes->False**
AxesLabel->None	كتابة عناوين على المحاور	**AxesLabel->"z-label"** **-AxesLabel** **>{"x","y","z"}**
PlotLabel->None	كتابة عنوان على الرسم	**PlotLabel->" any label "**
PlotPoints->15	عدد نقط العينة في الاتجاهين x,y والتى يتم عندها حساب قيم الدالة وهذا الاختيار لا يستخدم مع الأمر **Show**	**PlotPoints->n** **PlotPoints->{nx,ny}**
PlotRange->Automatic	مدى الإحداثيات المستخدمة فى الرسم	**PlotRange->{zmin,zmax}** **PlotRange->{{xn,xx},** **{yn,yx},{zn,zx}}** **PlotRange->All**
Ticks->Automatic	ترقيم محاور الإحداثيات	**Ticks->None** **Ticks->{xt,yt,zt}** حيث **xt , yt , zt** يمكن أن تأخذ القيم **None** أو **Automatic**

**In[3]:=rp1=Plot3D[Sin[x y],{x,0,4},{y,0,4},
AxesLabel->{"x-axes","y-axes","z-axes"}]**

استخدام المتغير **rp1** كمخزن
لرســــــم الدالة
Sin(x y)
على المنطقة المستطيلة الشكل
$0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 4$
مع كتابة العناوين
x-axes , y-axes , z-axes
على محاور الإحداثيات

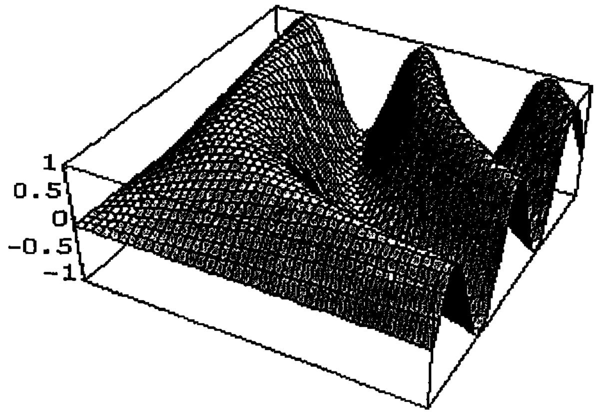


In[4]:=rp2=Show[rp1,PlotRange->{-0.5,0.5}]



استخدام المتغير **rp2** كمخزن
يوضع داخله أمر إعادة الرسم
Show للشكل السابق **rp1**
مع تغيير مدى الرسم بالاختيار
PlotRange->{-0.5,0.5}

```
In[5]:=Plot3D[Sin[x y],{x,0,4},{y,0,4},PlotPoints->40,
        Ticks->{None,None,Automatic}]
```



رســـــم الدالة

Sin(x y)

على المنطقة المستطيلة الشكل

$0 \le x \le 4 \quad , \quad 0 \le y \le 4$

مع استخدام الاختيار

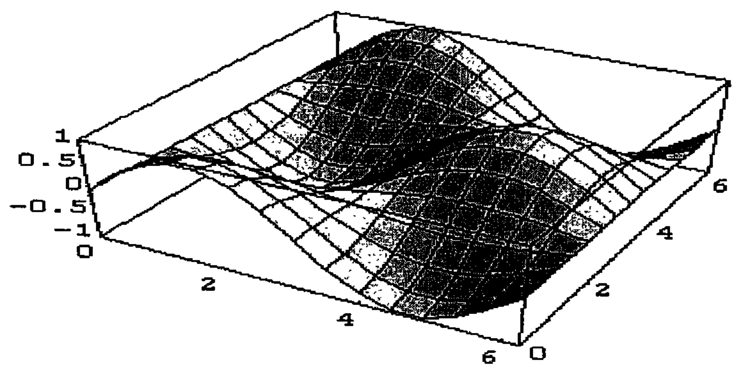
PlotPoints->40

وترقيم محور الإحداثيات z فقط

والأشكال الناتجة من الأمر **Plot3D** يمكن النظر أليها على أنها صور فوتوغرافيـــة للســـطوح وتوجد بعض الاختيارات مع الأوامر **Plot3D, Show** يمكن من خلالها فحص السطوح من مواضع مختلفة ومن أهم هذه الاختيارات هو الاختيار **ViewPoint** لتحديد إحداثيات النقطة فى الفراغ التى يتم وضع آلة التصوير عندها لالتقاط صور للسطح وبالتالى يمكن التعــرف علــى الملامح المختلفة للسطح عن طريق وضع الكاميرا فى أماكن مختلفة ، ويقوم ماثيماتيكـــا بوضـــع السطح داخل صندوق باستخدام الاختيار **Boxed** وأبعاد هذا الصندوق يمكن التحكم فيهـــا بواسطة الاختيار **BoxRatios** .

Option Name اسم الاختيار Default value وقيمته الفعالة	وظيفة الاختيار	قيم أخرى للاختيار
ViewPoint->{1.3,-2.4,2}	تحديد إحداثيات نقطة فى الفراغ يتم النظـــر من عندها الى السطح وهـــذه الإحداثيـــات تكون بالنسبة الى مركز الصندوق	ViewPoint->{xv,yv,zv} تحديد آي نقطة (xv,yv,zv) فى الفراغ
Boxed->True	رسم صندوق حـــول السطح	Boxed->False
BoxRatios->{1,1,0.4}	تحديـــد النســـبة بـــين أطوال اوجه الصندوق فى اتجاه المحاور x,y,z على الترتيب	BoxRatios->{nx,ny,nz} جعل النسبة nx:ny:nz بين أطوال اوجه الصندوق

In[6]:=rp3=Plot3D[Sin[x] Cos[y],{x,0,2Pi},{y,0,2P}]

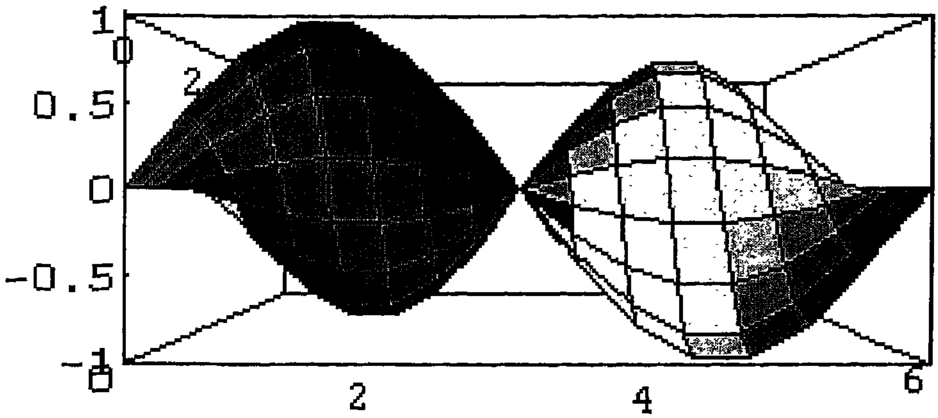


استخدام المتغير rp3 كمخزن لرسم سطح الدالة sin(x) cos(y) فى النطاق

$0 \le x \le 2\pi \quad , \quad 0 \le y \le 2\pi$

حيث يتم النظر الى السطح من آلة تصوير تم وضعها عند الإحداثيات الفعالة (1.3 , -2.4 , 2)

In[7]:=Plot3D[Sin[x] Cos[y],{x,0,2Pi},{y,0,2Pi},ViewPoint->{0,-2,0}]

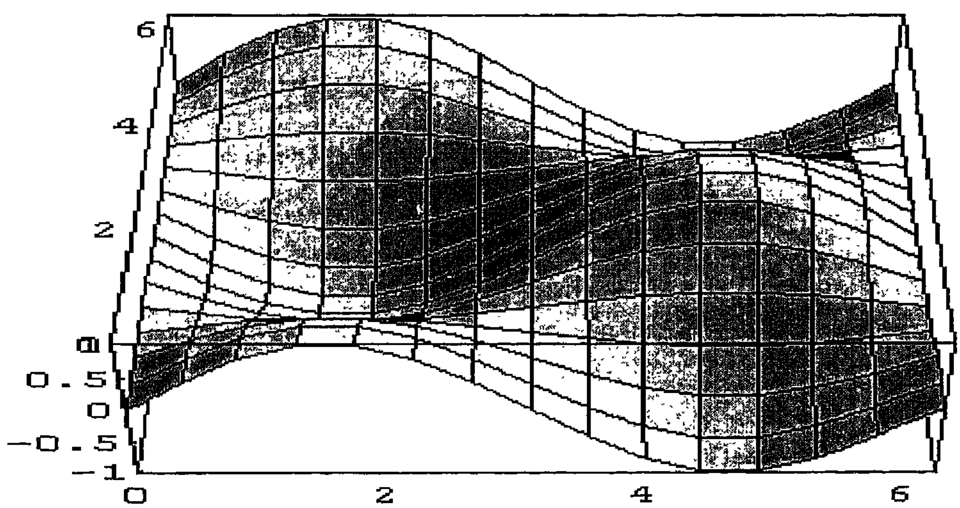


رســــــم سطح الدالة **sin(x) cos(y)** فى النطاق

$0 \le x \le 2\pi \quad , \quad 0 \le y \le 2\pi$

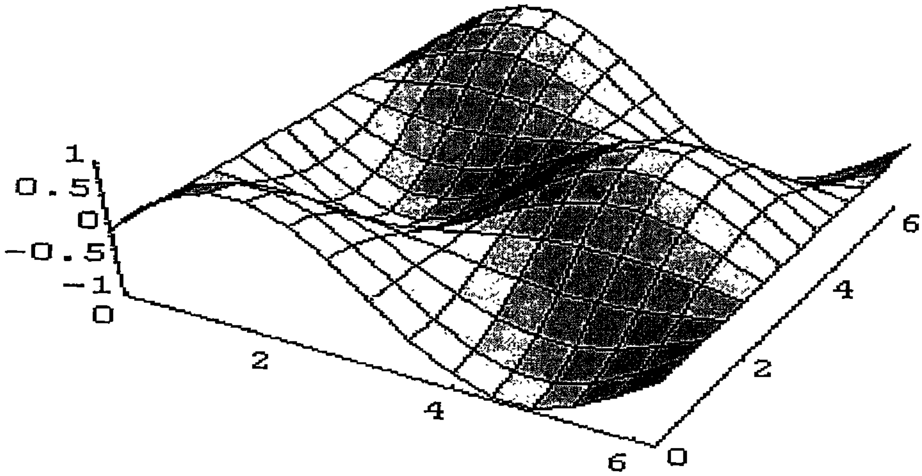
حيث يتم النظر الى السطح من آلة تصوير تم وضعها عند الإحداثيات (0, -2, 0)

In[8]:=Show[rp3,ViewPoint->{0,-4,4}]



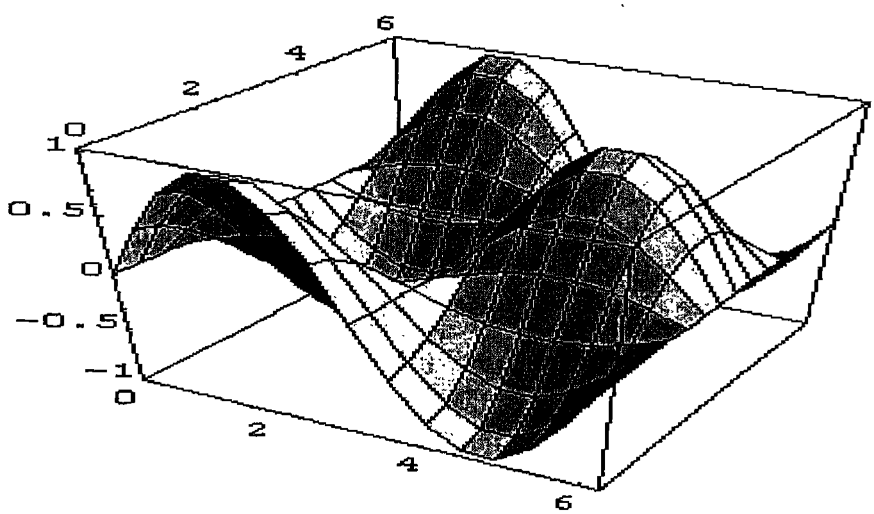
استخدام الأمر **Show** فى إعادة الرسم المخزون فى المتغير **rp3** حيث يتم تغيير موضع آلة التصوير الى الإحداثيات (0 , -4 , 4)

In[9]:=Show[rp3,Boxed->False]



استخدام الأمر Show في إعادة الرسم المخزون في المتغير rp3 حيث يتم عرض السطح فقط وبدون رسم صندوق من حوله وذلك عن طريق الاختيار Boxed->False

In[10]:=Show[rp3,BoxRatios->{1,1,1}]

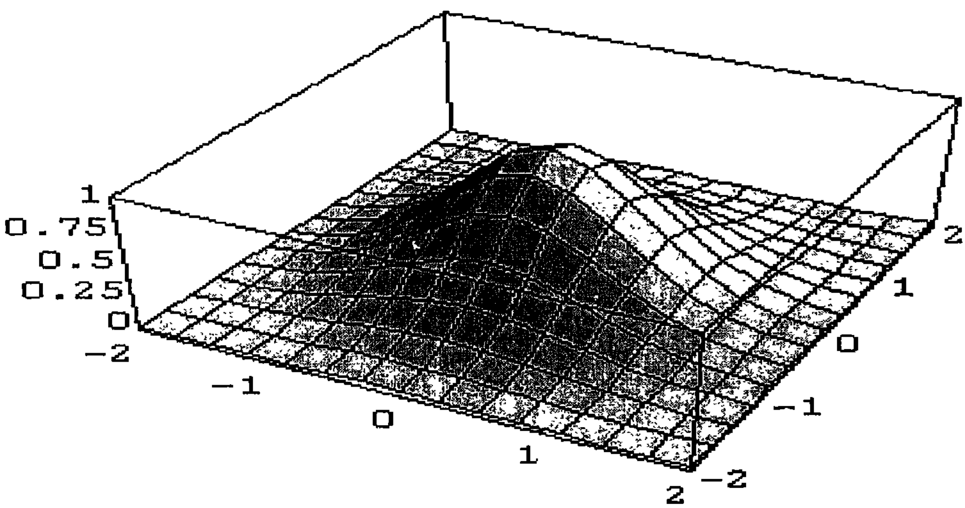


استخدام الأمر Show في إعادة الرسم المخزون في المتغير rp3 حيث يتم عرض السطح داخل صندوق مكعب الشكل وذلك عن طريق الاختيار BoxRatios->{1,1,1}

وعند رسم السطوح في الفراغ يمكن التحكم في الأجزاء المختفية من السطح باستخدام الاختيار **HiddenSurface** كما يمكن عمل ظلال للسطح باستخدام الاختيار **Shading** أو عمـــل شبكة على السطح في اتجاه المحاور **x,y** وذلك باستخدام الاختيار **Mesh**

Option Name اسم الاختيار Default value وقيمته الفعالة	وظيفة الاختيار	قيم أخرى للاختيار
HiddenSurface->True	منع ظهور الأجزاء المختفية من السطح	HiddenSurface->False
Shading->True	عمل ظلال للسطح	Shading->False
Mesh->True	رسم شبكة على الســـطح في اتجاه المحاور x,y	Mesh->False

In[11]:=rp4=Plot3D[Exp[-x^2-y^2],{x,-2,2},{y,-2,2}]

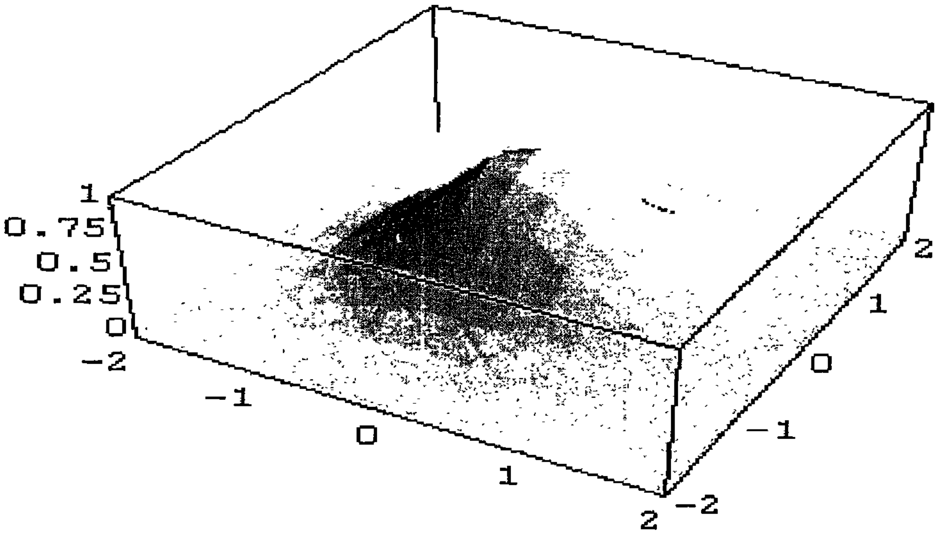


رســـــم سطح الدالة $e^{-x^2-y^2}$ في النطاق

$$-2 \le x \le 2 \quad , \quad -2 \le y \le 2$$

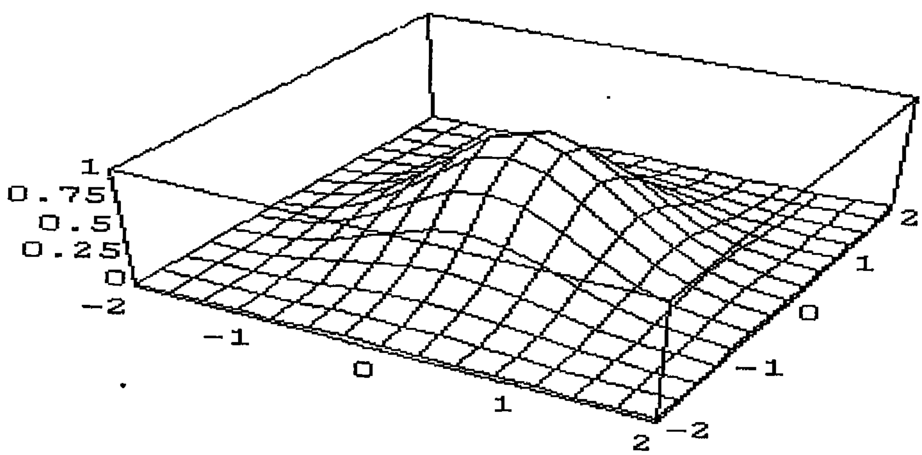
ونلاحظ وجود شبكة على السطح في اتجاه المحاور وذلك نتيجة الاختيار الفعال **Mesh->True**

In[12]:=Show[rp4,Mesh->False]



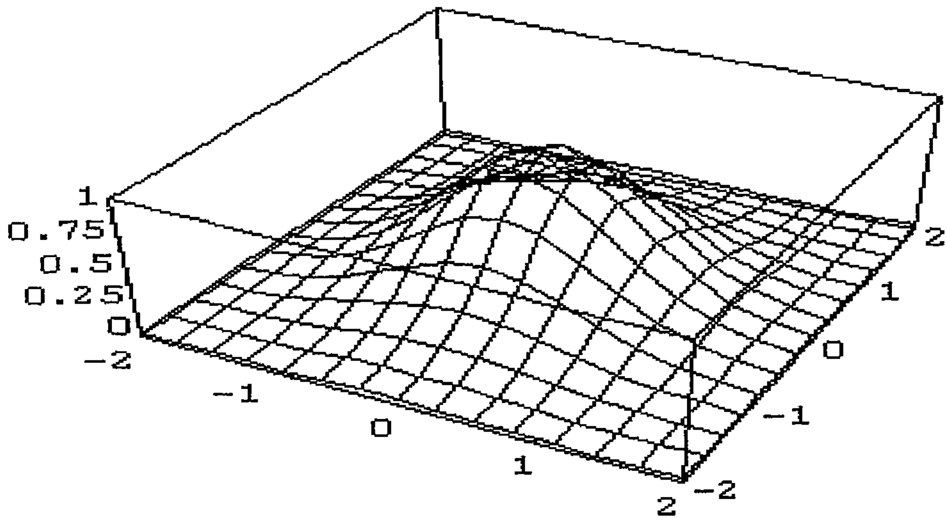
استخدام الأمر **Show** فى إعادة الرسم المخزون فى المتغير **rp4** حيث يتم العرض بدون رسم شبكة على السطح فى اتجاه المحاور وذلك نتيجة الاختيار **Mesh->False**

In[13]:=Show[rp4,Shading->False]



استخدام الأمر **Show** فى إعادة الرسم المخزون فى المتغير **rp4** حيث يتم العرض بدون تظليل السطح وذلك نتيجة الاختيار **Shading->False**

In[14]:=Show[rp4,HiddenSurface->False]

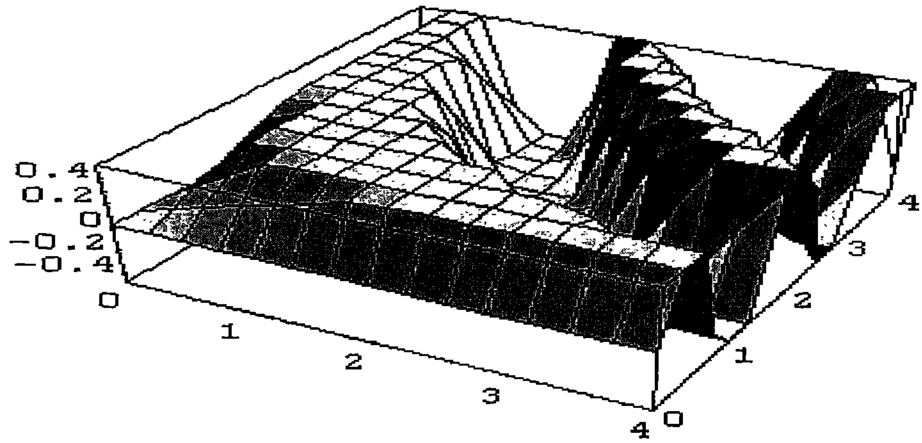


استخدام الأمر **Show** فى إعادة الرسم المخزون فى المتغير **rp4** حيث يتم إظهار الأجزاء المختفية من السطح وذلك نتيجة الاختيار **HiddenSurface->False**

وعند رسم السطوح فى الفراغ يقوم ماثيماتيكا بقطع أجزاء السطح الخارجة عن الصندوق ويمكن توضيح الأماكن التى تم فيها قطع السطح باستخدام الاختيار **ClipFill** كالآتي :

Option Name اسم الاختيار Default value وقيمته الفعالة	وظيفة الاختيار	قيم أخرى للاختيار
ClipFill->Automatic	توضيح الأماكن التى تم عندها قطع السطح وفقا للمواصفات الفعالة للرسم	ClipFill->None ClipFill->GrayLevel[i] ClipFill->RGBColor[r,g,b] ClipFill->{bootom,top}

In[15]:= rp5=Plot3D[Sin[x y],{x,0,4},{y,0,4},PlotRange->{-0.5,0.5}]

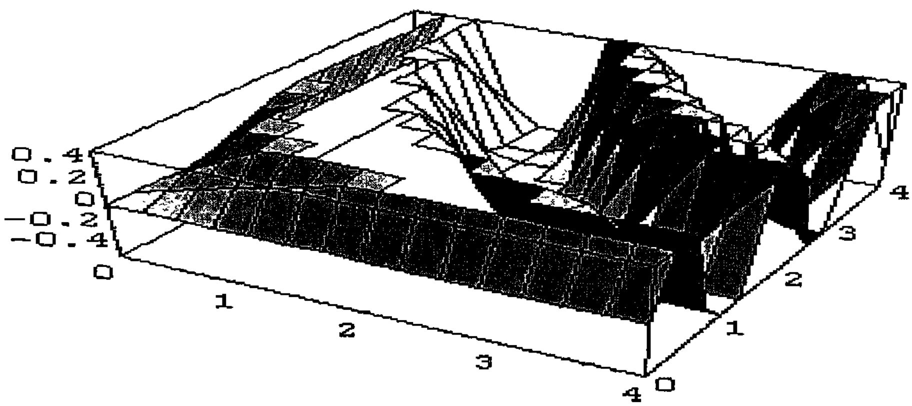


استخدام المتغير **rp5** كمخزون لرســـم الدالة **Sin(x y)** على المنطقة المستطيلة الشكل

$$0 \le x \le 4 \quad , \quad 0 \le y \le 4$$

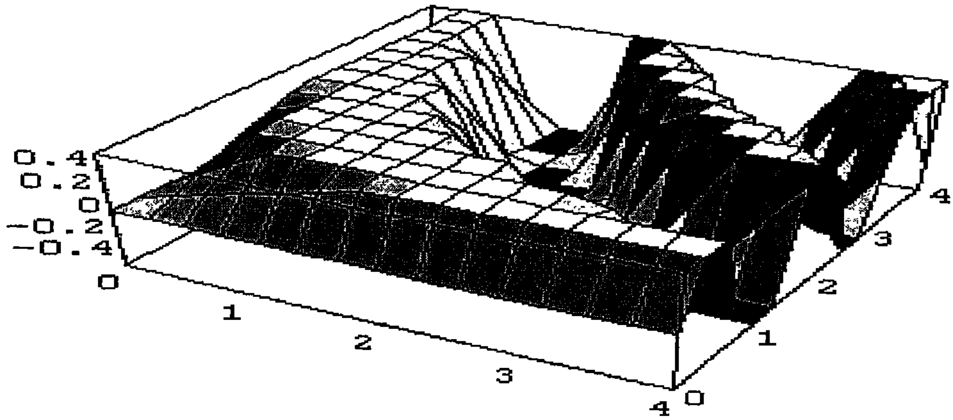
مع تغيير مدى الرســـــــم بالاختيار **PlotRange->{-0.5,0.5}**

In[16]:= Show[rp5,ClipFill->None]



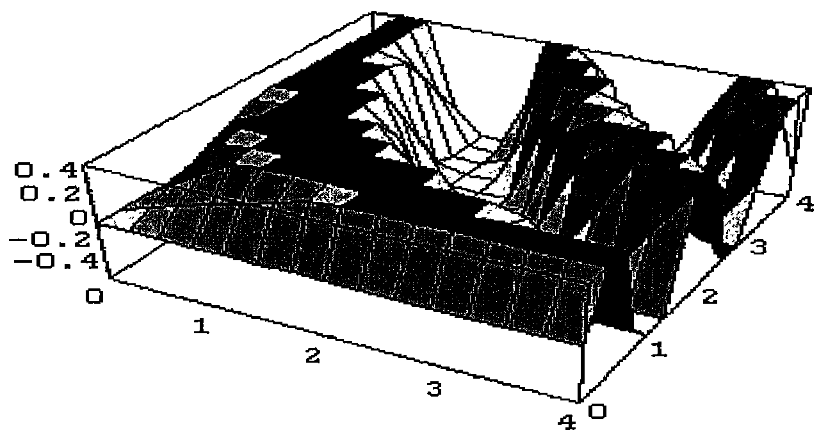
استخدام الأمر **Show** فى إعادة الرســـم المخزون فى المتغير **rp5** حيث يتم عرض السـطح بحيث تترك الأجزاء المقطوعة من السـطح واضحـة بدون تظليل وذلك نتيجة الاختيار **ClipFill->None**

In[17]:= Show[rp5,ClipFill->{GrayLevel[0],GrayLevel[1]}]



استخدام الأمر **Show** فى إعادة الرســـم المخزون فى المتغير **rp5** حيث يتم عرض السـطح بحيث تظهر الأجزاء المقطوعة للســطح من اسفل باللون الأسود ومن أعلى باللون الأبيض وذلك نتيجة الاختيار **ClipFill->{GrayLevel[0],GrayLevel[1]}**

In[18]:=Show[rp5,ClipFill->{GrayLevel[1],GrayLevel[0]}]



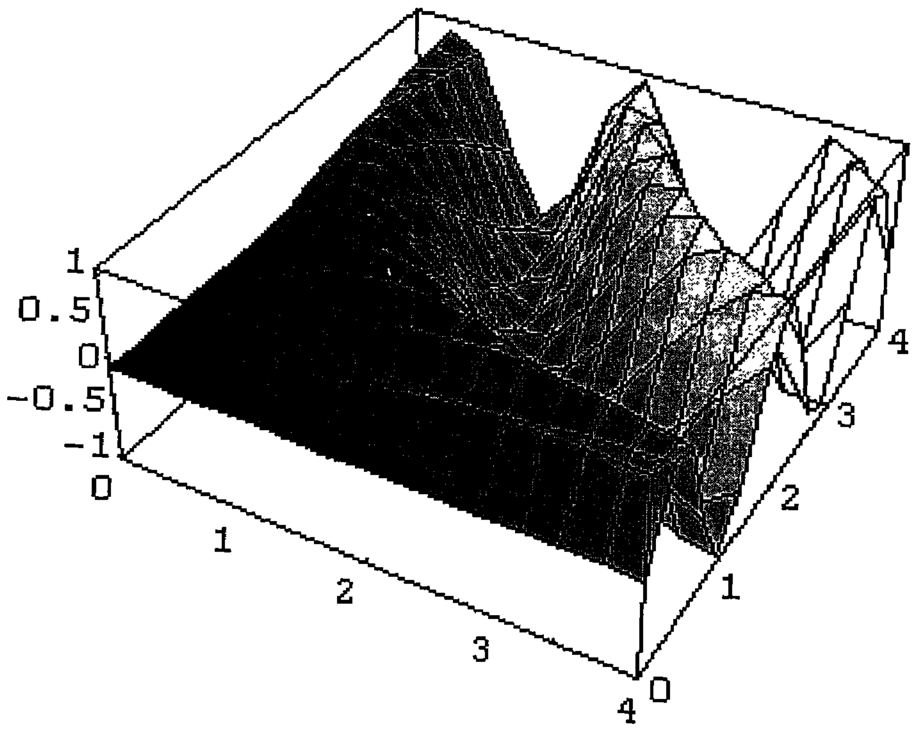
استخدام الأمر **Show** فى إعادة الرســـم المخزون فى المتغير **rp5** حيث يتم عرض السـطح بحيث تظهر الأجزاء المقطوعة للســطح من اسفل باللون الأبيض ومن أعلى باللون الأسود وذلك نتيجة الاختيار **ClipFill->{GrayLevel[1],GrayLevel[0]}**

ويستطيع ماثيماتيكا تظليل كل جزء من سطح الدالة وفقا لموصفات معينـــة وذلـــك باســـتخدام الأمر Plot3D في الصورة الآتية :

Plot3D[{f(x,y),s},{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax}]

رســـــم ســــطح الدالة f(x,y) مع تظليل السطح وفقا للدالة s

In[19]:=Plot3D[{Sin[x y],GrayLevel[(x+y)/8]},{x,0,4},{y,0,4}]



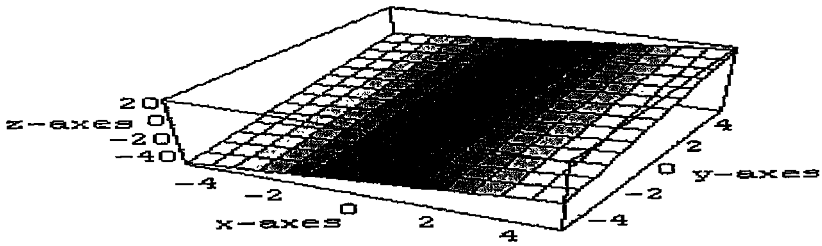
رســـــم الدالة Sin(x y) على المنطقة المستطيلة الشكل

$0 \leq x \leq 4 \quad , \quad 0 \leq y \leq 4$

وبحيث يتم تظليل ســـطح الدالة وفقا للدالة GrayLevel[(x+y)/8]

حيث تتغير قيم x , y على المنطقة المعطاة ونلاحظ في الرسم تدرج التظليل للسطح

```
In[20]:=Plot3D[{3x+4y-9,GrayLevel[Abs[x]/5]},{x,-5,5},{y,-5,5},
        AxesLabel->{"x-axes","y-axes","z-axes"}]
```

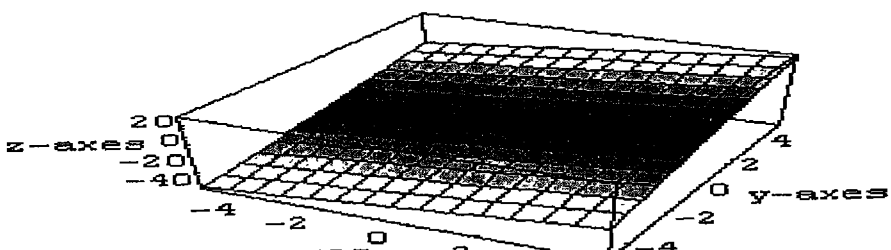


رســـــــم المستوى $z= 3x+4y-9$ على المنطقة المستطيلة الشكل

$-5 \le x \le 5 \quad , \quad -5 \le y \le 5$

وبحيث يتم تظليل ســـطح المســـتوى وفقا للدالة GrayLevel[Abs[x]]/5 حيث تتغير قيم x , y على المنطقة المعطاة ونلاحظ فى الرسم تدرج التظليل لسطح المستوى فى اتجاه محور x كما نلاحظ كتابة عناوين على المحاور نتيجة للاختيار AxesLabel

```
In[21]:=Plot3D[{3x+4y-9,GrayLevel[Abs[y]/5]},{x,-5,5},{y,-5,5},
        AxesLabel->{"x-axes","y-axes","z-axes"}]
```



رســـــــم المستوى $z= 3x+4y-9$ على المنطقة المستطيلة الشكل

$-5 \le x \le 5 \quad , \quad -5 \le y \le 5$

وبحيث يتم تظليل ســـطح المســـتوى وفقا للدالة GrayLevel[Abs[x]]/5 حيث تتغير قيم x , y على المنطقة المعطاة ونلاحظ فى الرسم تدرج التظليل لسطح المستوى فى اتجاه محور y كما نلاحظ كتابة عناوين على المحاور نتيجة للاختيار AxesLabel

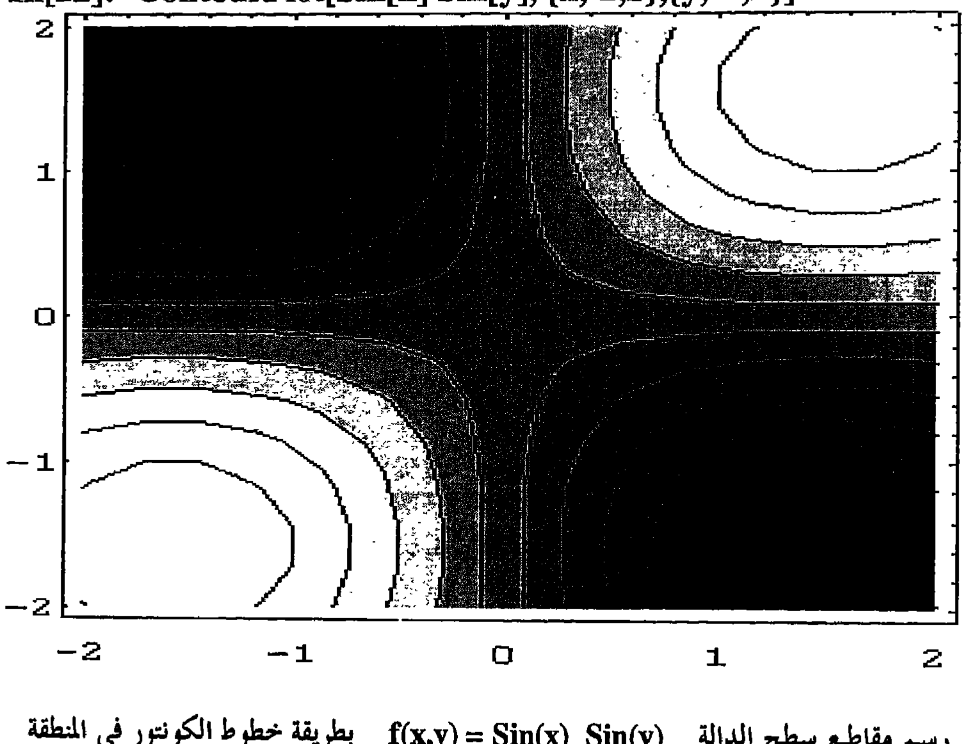
وعندما نحاول التعمق فى فهم طبيعة ســـطح خاص فانه يكون من المفيد النظـــر الى الســطح بطرق مختلفة والأمر Plot3D يقدم لنا صورة فى الفراغ للسطح وفى برنـــامج ماثيماتيكـــا يمكن الحصول على خريطة لمقاطع السطح بطريقة خطوط الكونتور التى تربط النقط الواقعة على الســــطح والتى لها نفس الارتفاع ويتم ذلك عن طريق الأمر ContourPlot كالآتي:

ContourPlot[f, {x, xmin, xmax}, {y, ymin, ymax}]

رســـم خطوط الكونتور للدالة **f (x,y)** فى النطاق من **= xmin** الى **x = xmax**

ومن **y = ymin** الى **y = ymax**

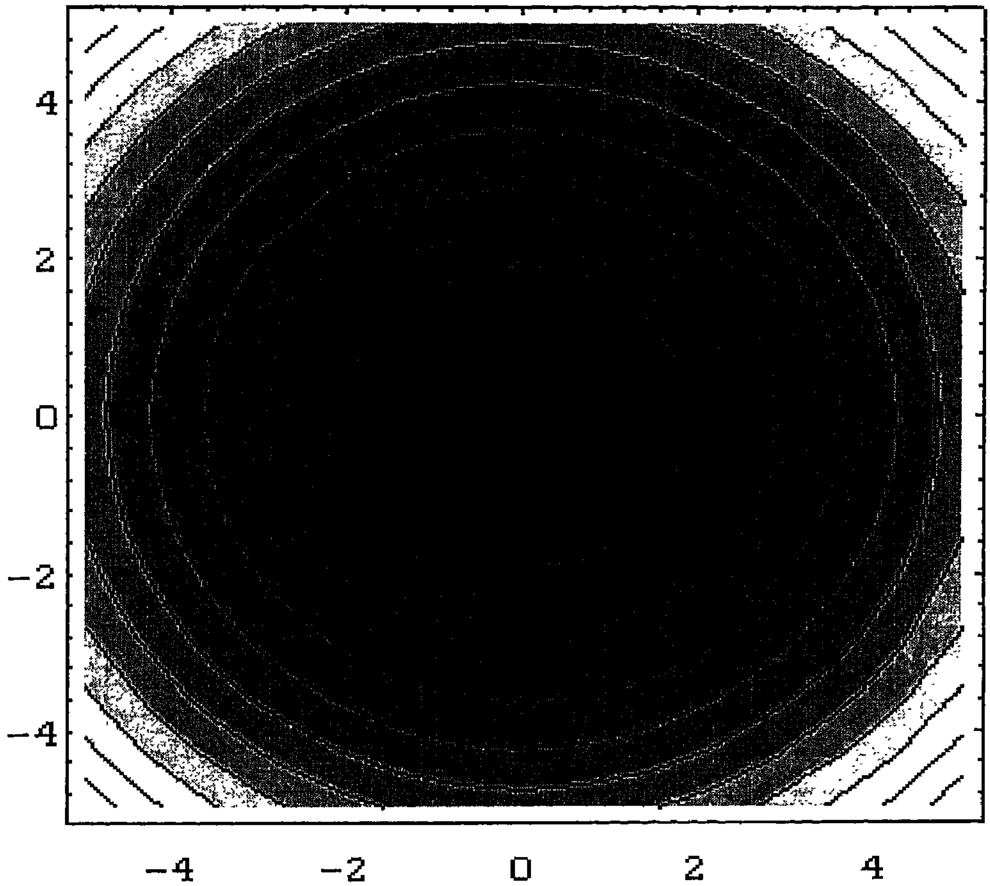
In[22]:=ContourPlot[Sin[x] Sin[y], {x,-2,2},{y,-2,2}]



رسم مقاطع سطح الدالة f(x,y) = Sin(x) Sin(y) بطريقة خطوط الكونتور فى المنطقة

$-2 \leq x \leq 2 \quad , \quad -2 \leq y \leq 2$

In[23]:= ContourPlot[x^2+y^2, {x,-5,5},{y,-5,5}]



رسم مقاطع سطح الدالة $f(x,y)=x^2+y^2$ بطريقة خطوط الكونتور فى المنطقة

$$-5 \le x \le 5 \quad , \quad -5 \le y \le 5$$

٣ • رســم الدوال البارامتريــة Parametric Plots

إذا كان f(x) دالة وحيدة القيمة single valued فإن المعادلات التى علــى الصــورة y = f(x) تصف منحنيات فى المستوى يقطعها أي خط رأسي مرة واحدة فقــط فــى نطــاق التعريف ، والإحداثى y لكل نقطة يكون دالة فى الإحداثى x ولكن توجد منحنيات اكــثر تعقيدا تضاعف نفسها ومثل هذه المنحنيات يمكن دراستها بسهوله باستخدام الصورة البارامترية ويتم ذلك بجعل المتغيرات x , y دوال فى متغير آخر t مثل x = g(t) , y = h(t) وكل قيمة للمتغير t تعين قيمة للمتغيرات x , y يمكن اعتبارها إحداثيات نقطة فى المستوى xy وفئة جميع النقط (g(t),h(t)) تكون منحنى والمعادلتان x = g(t) , y = h(t) تســميان المعادلتان البارامتريتان للمنحنى والمتغير t يسمى بارامتر • وبرنامج ماثيماتيكا قادر على رســم الدوال فى المستوى بالصورة البارامترية وذلك باستخدام الأمر ParametricPlot كالآتي :

```
ParametricPlot[{fx, fy}, {t, tmin, tmax}]
```

رسم الدالة المعطاة بالصورة البارامترية

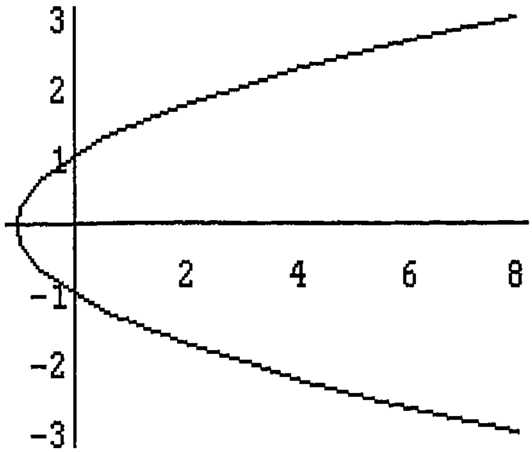
x=fx , y=fy , $tmin \le t \le tmax$

حيث fx , fy دوال فى البارامتر t

```
ParametricPlot[{{fx, fy}, {gx, gy}, ...}, {t, tmin, tmax}]
```

رسم اكثر من دالة معطاة بالصورة البارامترية

In[1]:=ParametricPlot[{t^2-1,t},{t,-3,3}]



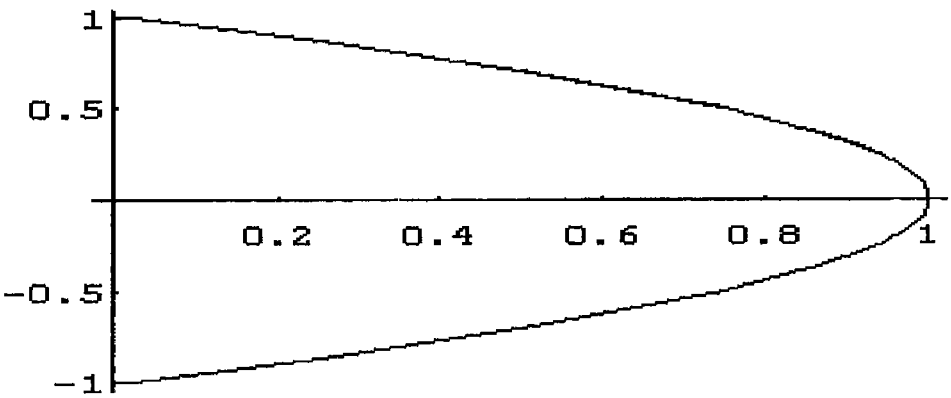
رسم المنحنى الذى معادلتاه البارامتريتان

$x=t^2-1$, $y=t$, $-3\leq t\leq 3$

والمنحنى فى الصورة الكارتيزية يكون

$x^2=x+1$, $-1\leq x\leq 8$

In[2]:=ParametricPlot[{Cos[t]^2,Sin[t]},{t,0,2Pi}]



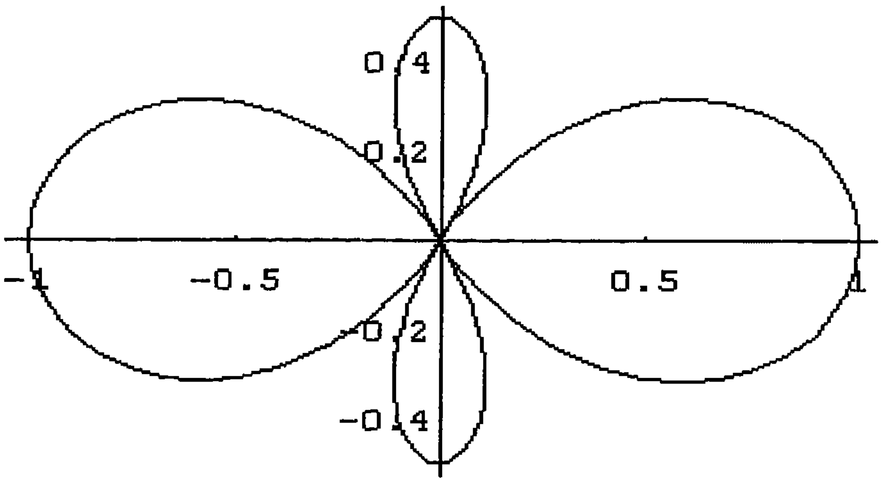
رسم المنحنى الذى معادلتاه البارامتريتان

$x=\cos^2(t)$, $y=\sin(t)$, $0\leq t\leq 2\pi$

والمنحنى فى الصورة الكارتيزية يكون

$y^2=1-x$, $0\leq x\leq 1$

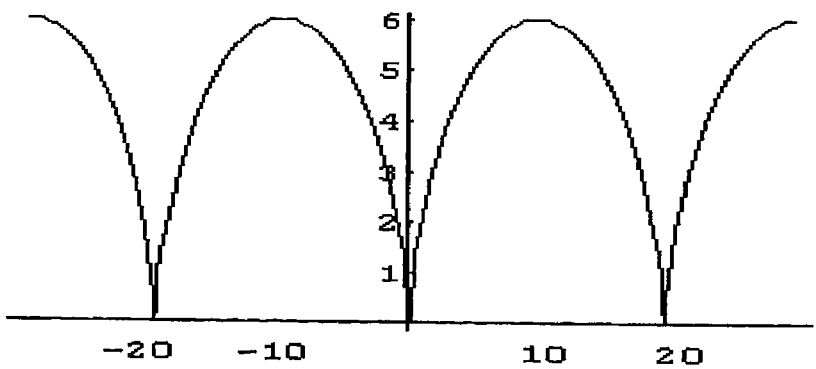
```
In[3]:=r[t_]:=(3Cos[t]^2-1)/2;
       ParametricPlot[{r[t]Cos[t],r[t]Sin[t]},{t,0,2Pi}]
```



رسم المنحنى فى الصورة القطبية

$$r=\frac{3\cos^2(t)-1}{2} \quad , \quad 0 \le t \le 2\pi$$

```
In[4]:=ParametricPlot[{3(t-Sin[t]),3(1-Cos[t])},{t,-3Pi,3Pi}]
```

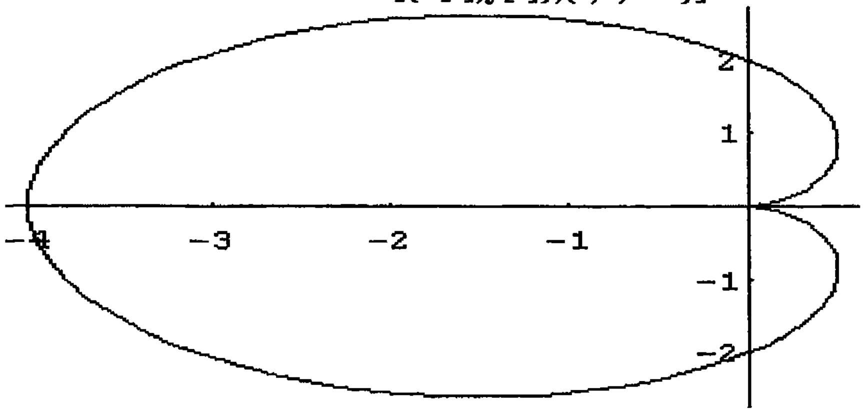


رسم منحنى الدويرى (السيكلويد)

$x = 3(t-\sin(t))$

$y = 3(1-\cos(t)) \quad , \quad -3 \le t \le 3$

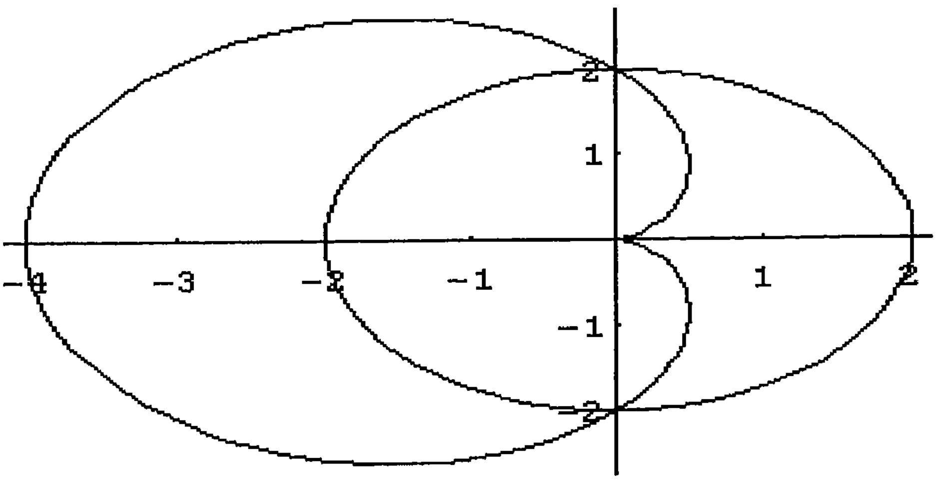
```
In[5]:=x[t_]:=2(Cos[t]-Cos[t]^2);
       y[t_]:=2(Sin[t]-Sin[t] Cos[t]);
       ParametricPlot[{x[t],y[t]},{t,0,2Pi}]
```



رسم منحنى الكارديويد المعطى بالصورة البارامترية

$x(t) = 2\cos(t)\,[1 - \cos(t)]$
$y(t) = 2\sin(t)\,[1 - \cos(t)]$

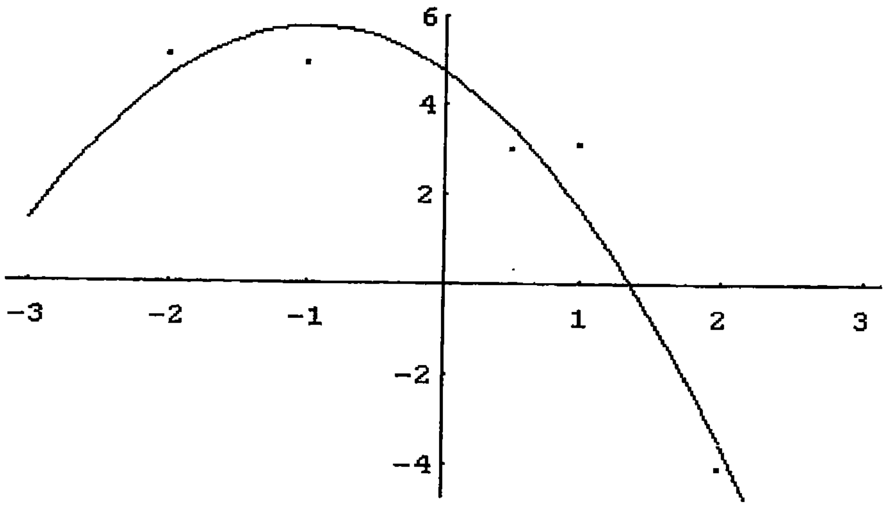
```
In[6]:=ParametricPlot[{{x[t],y[t]},{2Cos[t],2Sin[t]}},{t,0,2Pi}]
```



رسم منحنى الكارديويد السابق مع الدائرة المعطاة بالصورة القطبية

$x(t) = 2\cos(t)$
$y(t) = 2\sin(t)$

الباب السادس
ماثيماتيكا والتحليل العددى



فى هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكا والخاصة بالموضوعات الآتية :

١. الحل العددى لمعادلات كثيرات الحدود
Numerical Solution of Polynomial Equations

٢. إيجاد جذر تقريبى — Numerical Root Finding

٣. إيجاد القيم الصغرى — Numerical Minimization

٤. الحساب العددى للمجموع وحواصل الضرب
Numerical Sum and Product

٥. التكامل العددى — Numerical Integration

٦. التقريب بالمربعات الصغرى — Least - squares

الباب السادس

ماثيماتيكا والتحليل العددى

التحليل العددى **Numerical Analysis** هو أحد فروع الرياضيات التى تعتمد بقوة على التطورات الحديثة فى علم الكومبيوتر وعلى التطبيقات فى استخدام الطرق العددية لحل المسائل الرياضية المختلفة ، ومن اكثر مميزات ماثيماتيكا هو المقدرة على الحصول على نتائج مضبوطة وفى صورة رمزية **Exact Symbolic Results** للحسابات الرياضية المختلفة وفى بعض الحسابات يكون من غير الممكن الحصول على النتائج المضبوطة ولمثل هذه الحسابات فإن ماثيماتيكا يقدم العديد من الدوال والأوامر للحصول على قيم عددية تقريبية للنتائج وكما علمنا من قبل فإن الدالة **N** والتى تستخدم بالصورة

N[expr] أو **expr//N**

تقوم بحساب قيمة عددية تقريبية للعملية الحسابية **expr** والدالة

N[expr,n]

تقوم بحساب قيمة عددية تقريبية للعملية الحسابية **expr** مقربة الى **n** من الأرقام العشرية وفى هذا الباب سوف نتعرف على بعض أوامر ماثيماتيكا الخاصة بالحصول على قيم تقريبية لنتائج العمليات الرياضية فى مجالات مختلفة من التحليل العددى ،

١. الحل العددى لمعادلات كثيرات الحدود
Numerical Solution of Polynomial Equations

فى برنامج ماثيماتيكا يمكن حل معادلات كثيرات الحـــدود باســـتخدام الأمـــر Solve كما عرفنا فى الباب الثالث وفى حالة عدم الحصول على حل صريـــح للمعادلـــة أو مجموعـــة المعادلات يمكن استخدام الدالة N للحصول على حلول عددية تقريبية

باستخدام الأمر Solve يمكن حل معادلة كثيرة الحدود $x^2 - 3x + 2 = 0$ والحصول على الجذور

```
In[1]:= Solve[x^2-3x+2==0,x]
Out[1]={{x -> 1}, {x -> 2}}
```

الأمر Solve لم يتمكن من إيجاد حل معادلة كثيرة الحدود $x^5 + 7x + 1 = 0$

```
In[2]  := Solve[x^5+7x+1==0,x]
Out[2] = ToRules[Roots[7 x + x^5  == -1, x]
```

باستخدام الدالة N نحصل على قيمة عاددية تقريبية للحل

```
In[3]  :=N[%]
Out[3] ={{x -> -1.11308 - 1.15173 I},
         {x -> -1.11308 + 1.15173 I},
         {x -> -0.142849},
         {x -> 1.1845 - 1.15139 I}, {x -> 1.1845 + 1.15139 I}}
```

ويمكن إيجاد حلول عددية تقريبية بطريقة مباشرة لمعادلات كثيرات الحدود بـــدون الحاجـــة الى إيجاد الحل المضبوط أولا وذلك باستخدام الأمر NRoots كالآتي :

للحصول على حـــــل عددى تقريبي لمعـــــادلة كثيرة الحدود poly = 0 بالنسبة الى المتغير x	NRoots[poly= = 0 ,x]
للحصول على حــل عددى تقريبي لمعـــــادلة كثيرة الحدود poly = 0 بالنســـبة الى المتغير x وبدقة n رقم عشرى	NRoots[poly= = 0,x,n]

للحصول على حل عددى تقريبي لمعادلة كثيرة الحدود $x^5 + 7x + 1 = 0$

In[4]:=NRoots[x^5+7x+1==0,x]

Out[4]=

x = = -1.11308 - 1.15173 I ||
x = = -1.11308 + 1.15173 I || x = = -0.142849 ||
x = = 1.1845 - 1.15139 I || x = = 1.1845 + 1.15139 I

لجعل الحل الناتج من جملة الإدخال In[4] في صورة قائمة بدلا من الصورة المنطقية

In[5]:=ToRules[%]

Out[5]=

Sequence[{x -> -1.11308 - 1.15173 I},
{x -> -1.11308 + 1.15173 I},
{x -> -0.142849},
{x -> 1.1845 - 1.15139 I},
{x -> 1.1845 + 1.15139 I}]

٢. إيجاد جذر تقريبى Numerical Root Finding

الأمر **NRoots** يقدم طريقة لإيجاد حلول عددية تقريبية لمعادلات كثيرات الحدود لكن إيجاد حلول عددية لمعادلات عامة (تحتوى على دوال مثلثية أو أسية أو لوغاريتمية ...) يكون اكثر صعوبة ، وبرنامج ماثيماتيكا يحتوى على الأمر **FindRoot** الذى يقدم طريقة عددية للبحث عن أي جذر للمعادلة أو لمجموعة من المعادلات بالقرب من نقطة بداية x_0 وذلك باستخدام طريقة نيوتن **Newton's method** فى إيجاد جذر للمعادلة $f(x) = 0$ مبتدئا من نقطة البداية x_0 وبمعلومية قيمة المشتقة $f'(x)$ يتم الحصول على متتابعة من القيم x_n حتى نصل الى اقرب جذر من نقطة البداية ويتم طباعة هذا الجذر فقط حتى إذا كان للمعادلة اكثر من جذر ، ومتتابعة القيم x_n تحسب من العلاقة التكرارية

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad , \quad n = 0 , 1 , \ldots$$

وفى حالة إذا كان من الصعب الحصول على مشتقة الدالة بصورة رمزية فإنه يتم حساب المشتقة $f'(x)$ بصورة عددية تقريبية من العلاقة

$$f'(x_n) \cong \frac{f(x_{n-1}) - f(x_n)}{x_{n-1} - x_n}$$

ويتم حساب جذر للمعادلة $f(x) = 0$ باستخدام طريقة القاطع **secant method** من العلاقة

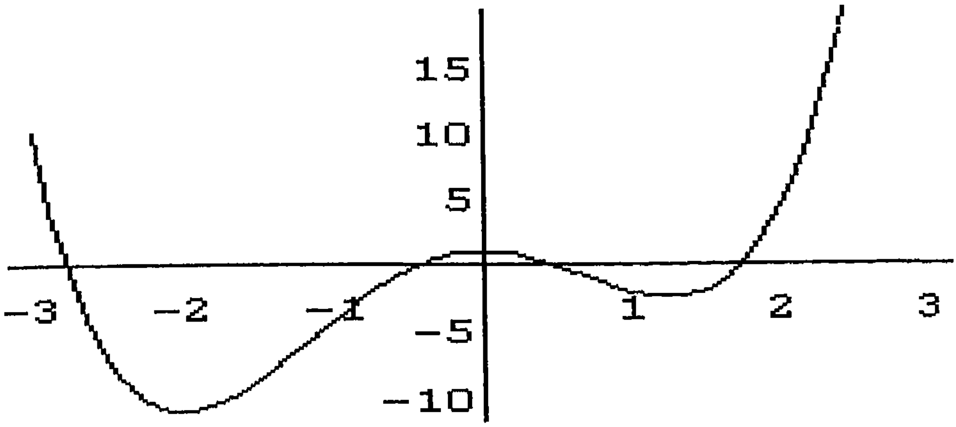
$$x_{n+1} = x_n - \left(\frac{x_{n-1} - x_n}{f(x_{n-1}) - f(x_n)} \right) f(x_n) \qquad , \quad n = 1, 2, \ldots$$

حيث $x_1^{\prime}$, x_0 قيم ابتدائية يتم تحديدها .

وفي الجدول الآتي نعرض الصيغ المختلفة للأمر **FindRoot**

الصيغة العامة للأمر	العمل الذى يقوم به الأمر
FindRoot[lhs= =rhs,{x,x0}]	البحث عن جذر للمعادلة lhs= =rhs مبتدئا من النقطة $x = x_0$
FindRoot[lhs==rhs, {x,xstart,xmin,xmax}]	البحث عن جذر للمعادلة lhs= =rhs مبتدئا من النقطة x = xstart وبحيث يتم البحث داخل النطاق من x = xmin الى x = xmax ويتـــم إيقاف البحث عن الجذر خارج هذا الإطار
FindRoot[lhs==rhs,{x,{x0,x1}}]	البحث عن جذر للمعادلة lhs= =rhs مبتدئا من القيـــم الابتدائية x_1 , x_0 باستخدام طريقة القاطع
FindRoot[{eqn1,eqn2,...},{x,x0}, {y,y0},...]	البـــحث عن جذر لمجموعة المعـــادلات eqn1 , eqn2 , ... في وقت واحد مبتدئا من نقط البداية x_0 , y_0 , ...

```
In[1]:=f[x_]:=1-5 x^2+x^3+x^4;Plot[f[x],{x,-3,3}]
```



تعريف الدالة f(x) وهى كثيرة حـــدود من الدرجـــة الرابـــعة ثم رســـم الدالـــة فى الفترة (-3,3)

```
In[2]:=FindRoot[f[x]= =0,{x,-2.5}]
Out[2]={x -> -2.76251}
```

للحصول على جـــذر عددى تقريبى للمعادلة f(x) = 0 بالقرب من نقطة البداية x=-2.5

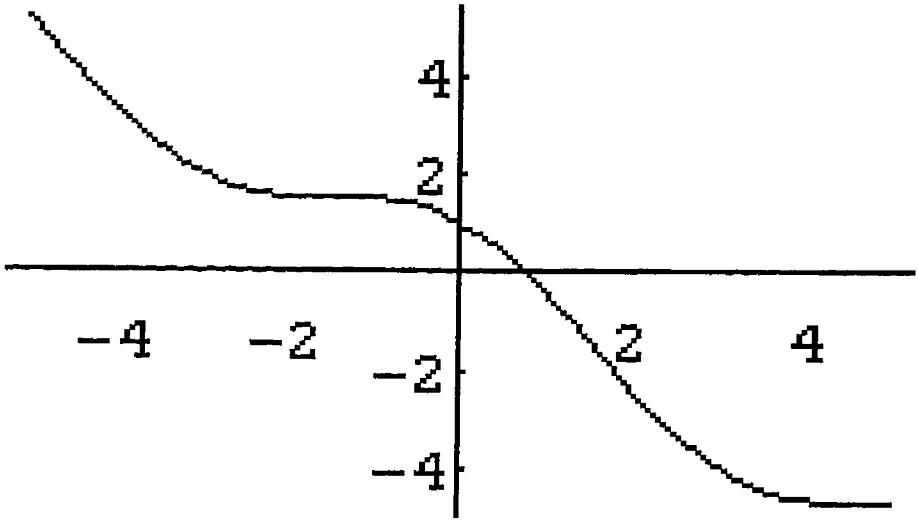
```
In[3]:=FindRoot[f[x]= =0,{x,0.1}]
Out[3]={x -> 0.483179}
```

للحصول على جـــذر عددى تقريبى للمعادلة f(x) = 0 بالقرب من نقطة البداية x=0.1

```
In[4]:=FindRoot[f[x]==0,{x,2}]
Out[4]={x -> 1.71594}
```

للحصول على جـــذر عددى تقريبى للمعادلة f(x) = 0 بالقرب من نقطة البداية x = 2

```
In[5]:= Plot[Cos[x]-x,{x,-5,5}]
```



رسم الدالة $\cos(x) - x$ فى الفترة [-5,5]

للحصول على جــذر عددى تقريبى للمعادلة $\cos x=x$ بالقرب من $x=0$

```
In[6]:=FindRoot[Cos[x]==x,{x,0}]
Out[6]={x -> 0.739085}
```

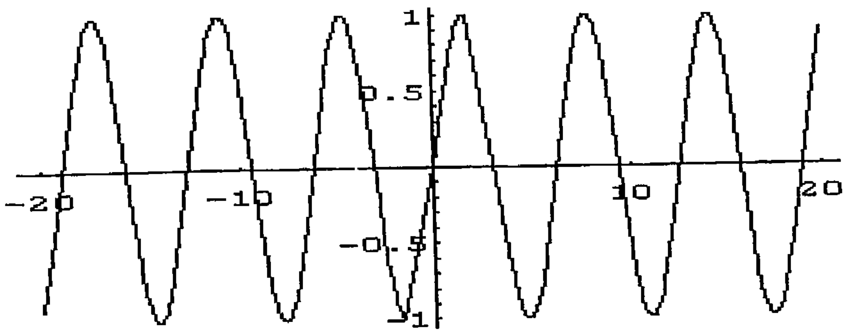
للحصول على جذر عددى تقريبى للمعادلة مبتدئا من نقط البداية $x_0 = 0 , x_1 = 1$

```
In[7]:=FindRoot[Cos[x]= =x,{x,{0,1}}]
Out[7]={x -> 0.739085}
```

للحصول على جذر عددى تقريبى للمعادلة $x^2 -1 = 0$ بالقرب من نقطة بداية يتم اختيارها عشوائيا داخل الفترة (0,1)

```
In[8]:=FindRoot[x^2-1==0,{x,Random[]}]
Out[8]={x -> 1.}
```

In[9]:=Plot[Sin[x],{x,-20,20}]



منحنى الدالة **sin(x)** يقطع محور **x** فى عدد لانهائى من النقط

$$x = n\pi, \ n = 0, \ \pm1, \ \pm2, ...$$

للحصول على جــذر عددى تقريبى للمعادلة **sin x = 0** بالقرب من نقطة البداية **x=3**

In[10]:=FindRoot[Sin[x]==0,{x,3}]
Out[10]={x -> 3.14159}

المعادلة **sin x = 2** ليس لها حل حقيقى ولكن لها حل مركب لذلك تظهر رسالة تفيد بأن طريقة نيوتن لا تقترب من الجذر

In[11]:=FindRoot[Sin[x]==2,{x,1}]
Out[11]=FindRoot::cvnwt:
Newton's method failed to converge to the prescribed accuracy after 15 iterations.

للحصول على جــذر عددى تقريبى للمعادلة **sin x = 2** بالقرب من نقطة البداية **x=I**

In[12]:=FindRoot[Sin[x]= =2,{x,I}]
Out[12]={x -> 1.5708 + 1.31696 I}

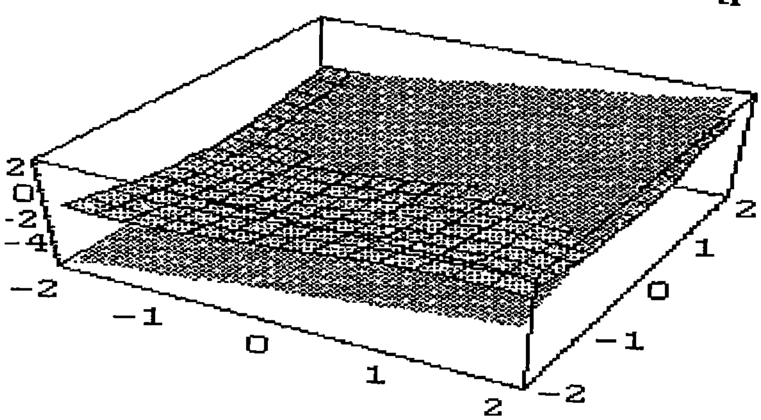
الدالة **FindRoot** تقوم بالبحث عن جذر عددى تقريبى للمعادلة **sin x = 0** بالقرب من نقطة البداية **x=3** وداخل الفترة **[2.5,3.5]** فقط ونلاحظ فى هذا المثال انه يوجد جذر فى هذه الفترة

In[13]:=FindRoot[Sin[x]= =0,{x,3,2.5,3.5}]
Out[13]={x -> 3.14159}

الدالة FindRoot تقوم بالبحث عن جذر عددى تقريبى للمعادلة sin x = 0 مبتدئا من النقطة x=1 وداخل الفترة [0.5,1.5] فقط ونلاحظ فى هذا المثال انه لا يوجد جذر فى هذه الفترة

```
In[14]:=FindRoot[Sin[x]= =0,{x,1,0.5,1.5}]
Out[14]=FindRoot::regex:
Reached the point {-0.557408}
which is outsidethe region {{0.5, 1.5}}.
{x -> -0.557408}
```

```
In[15]:=p1=Plot3D[Sin[x]-Cos[y],{x,-2,2},{y,-2,2},
DisplayFunction->Identity];
p2=Plot3D[x+y-1,{x,-2,2},{y,-2,2},Mesh->False,
          DisplayFunction->Identity];
                                        Show[p1,p2]
```



فى هذا المثال تم استعراض رسم الدالة sin (x) - cos(x) وتخطيط السطح الناتج بخطوط شبكية مع رسم الدالة x + y - 1 بدون تخطيط السطح الناتج وقد تم رسم الدالتين معا فى شـــكل واحد لتوضيح تقاطع السطحين . ولإيجاد حـــل عددى تقريبى للمعادلتين معا فى آن واحد مبتدئا من نقط البداية x = 0.1 , y = 0.2

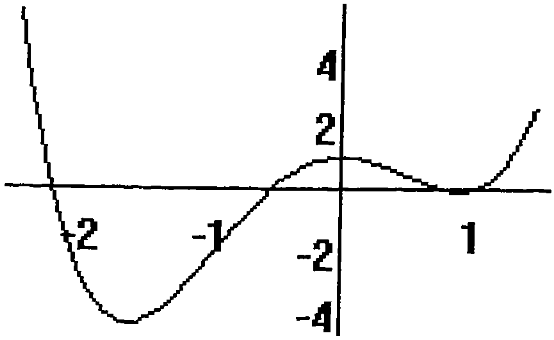
```
In[16]:=FindRoot[{Sin[x]==Cos[y],x+y==1},{x,0.1},{y,0.2}]
Out[16]={x -> 1.2854, y -> -0.285398}
```

٣ . إيجاد القيم الصغرى Numerical Minimization

في برنامج ماثيماتيكا الأمر **FindRoot** يقدم لنا طريقة عددية لإيجاد نقـــط تنعــدم عندها الدالة وفي بعض الأحيان يكون من المهم إيجاد نقط تكون عندها الدالـــــة **f(x)** اصغر ما يمكن آي إيجاد نقط نهايـــــات صغرى محليـــــة **local minimum** للدالـــة **f(x)** ويمكن الحصول على هذه النقط عن طريق تطبيق الأمر **FindRoot** على مشـــتقة الدالـــة **f(x)** ، وماثيماتيكا يقدم الأمر **FindMinimum** لحساب نقط نهايات صغرى للدالـــة **f(x)** بطريقة مباشرة وكذلك القيم الصغرى للدالة عند هـــذه النقـــط وباســـتخدام العلاقـــة **max(f) = - min(-f)** يمكن إيجاد نقط النهايات العظمى للدالة **f(x)** .

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
البحث عن نقطة نهاية صغـــرى محليـــة للدالـــة f بالقرب من نقطة البدايـــة x_0 وحســـاب القيمـــة الصغرى للدالة.	FindMinimum[f,{x,x0}]
البحث عن نقطة نهاية صغـــرى محليـــة للدالـــة f بالقرب من نقطة البداية x=xstart وبحيث يتم البحث فقط داخل النطاق مـــن x=xmin الى x=xmax وحساب القيمة الصغرى للدالة .	FindMinimum[f,{x,xstart,xmin, xmax}]
البحث عن نقطة نهاية صغـــرى محليـــة للدالـــة f بالقرب من القيم الابتدائية x_1 , x_0 وحســـــاب القيمـــة الصغـــرى للدالـــة ويســـتخدم الأمـــــر FindMinimum بهذه الصورة عندما يكون من الصعب إيجاد التفاضل للدالة f	FindMinimum[f,{x,{x0,x1}}]
البحث عن نقطة نهاية صغرى محلية لدالة في اكثر من متغير f(x , y , ...) بـــالقرب مـــن القيـــم الابتدائيـــــــة $x=x_0$, $y=y_0$, ... وحساب القيمة الصغرى للدالة .	FindMinimum[f,{x,x0},{y,y0},...]

In[1]:= f[x_]:=1-3x^2+x^3+x^4;Plot[f[x],{x,-2.5,1.5}]



تعريف الدالة

$f(x) = 1 - 3x^2 + x^3 + x^4$

ثم رسمها فى الفترة [-2.5,1.5]

ونلاحظ أن الدالـــة لها نقطتى نهاية صغرى محلية فى نطاق التعريف

In[2]:=FindMinimum[f[x],{x,-2}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب من

Out[2]={-4.24791, {x -> -1.65587}} النقطة x = -2 وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

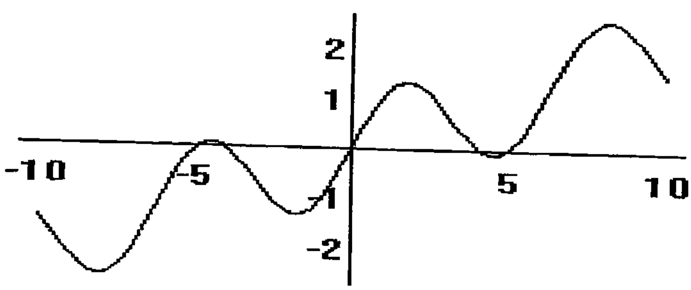
In[3]:=FindMinimum[f[x],{x,0.5}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب من

Out[3]={-0.0450589, {x -> 0.905869}} النقطة x = 1 اد القيمة الصغرى للدالة عندها

In[4]:=maxf=-FindMinimum[-f[x],{x,.5}] للبحث عن نقطةنهاية عظمى محلية للدالة بالقرب

Out[4]= {1. , { - { x->9.54982 10^{-13} }} من النقطة x = .5 إيجاد القيمة العظمى للدالة عندها

In[5]:= Plot[Sin[x]+x/5,{x,-10,10}]



رسم الدالة

sin x + x/5

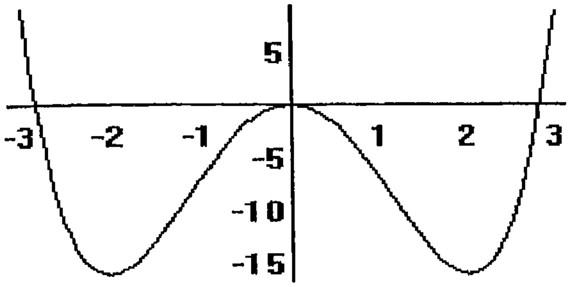
على الفترة [-10,10]

ونلاحظ أن الدالة لها اكثر من نقطة نهاية صغرى محلية فى نطاق التعريف .

In[6]:=FindMinimum[Sin[x]+x/5,{x,1}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب

Out[6]={-1.33423, {x -> -1.77215}} من النقطة x = 1 جاد القيمة الصغرى للدالة عندها

In[7]:= r3[x_]:=x^4-8x^2;Plot[r3[x],{x,-3,3}]



تعريف الدالة

$$r3(x) = x^4 - 8x^2$$

ثم رسمها في الفـــــترة [-3 , 3]
ونلاحظ أن الدالة لها نقطتي نهاية صغرى محلية في نطاق التعريف .

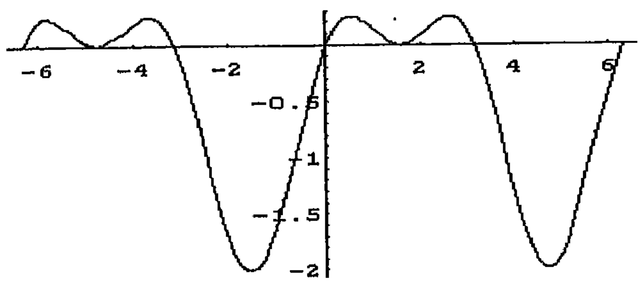
In[8]:=FindMinimum[r3[x],{x,1.5}]
Out[8]={-16., {x -> 2.}}

للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب من النقطة x = 1.5 وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

In[9]:=FindMinimum[r3[x],{x,-1,-2.5,0}]
Out[9]={-16., {x ->- 2.}}

للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالـــة بالقرب من النقطة x = -1 وفي النطاق [-2.5,0] وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

In[10]:= r4[x_]:=Sin[x]-Sin[x]^2; Plot[r4[x],{x,-2Pi,2Pi}]



تعريف الدالة

$$r4(x) = \sin(x) - \sin^2(x)$$

ثم رسمها في الفـــترة $[-2\pi, 2\pi]$
ونلاحظ أن الدالة لها اكثر من نقطة نهاية صغرىمحلية في نطاق التعريف .

In[11]:= FindMinimum[r4[x],{x,6}]
Out[11]={-2., {x -> 4.71239}}

للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالةr4[x]بالقرب من النقطة x = 6 وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

In[12]:= FindMinimum[r4[x],{x,-3}]
Out[12]={-2., {x -> -1.5708}}

للبحث عن نقطةنهايةصغرى محلية للدالةr4[x] بالقرب من النقطة x = -3 وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها

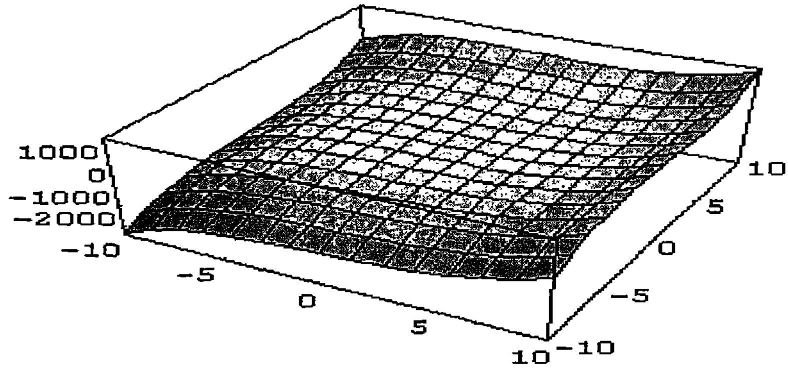
In[13]:= FindMinimum[r4[x],{x,-4}]
Out[13]={2.22045 10^{-16}, {x -> -4.71239}}

للبحث عن نقطةنهايةصغرى محلية للدالةr4[x] بالقرب من النقطة4- = xوإيجادالقيمةالصغرى للدالةعندها

In[14]:=- FindMinimum[-r4[x],{x,-4}]
Out[14]={0.25, {-(x -> -3.66519)}}

للبحث عن نقطةنهايةعظمى محليةللدالةr4[x]بالقرب من النقطة x = -4 وإيجاد القيمة العظمى للدالة عندها

In[15]:= f[x_,y_]:=x^3+y^3-3x y; Plot3D[f[x,y],{x,-10,10},{y,-10,10}]



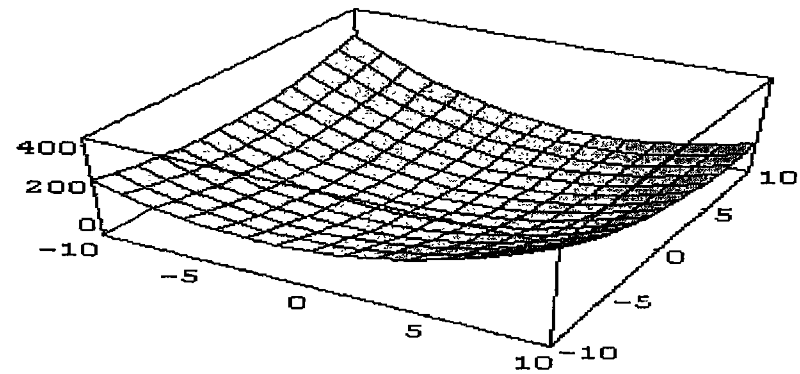
تعريف الدالة $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$ ثم رسمها فى الفراغ فى المنطقة

$$-10 \le x \le 10 \quad , \quad -10 \le y \le 10$$

In[16]:=FindMinimum[f[x,y],{x,0.4},{y,0.5}]
Out[16]={-1., {x -> 1., y -> 1.}}

للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب من x=0.4 , y=0.5 وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها .

In[17]:=h[x_,y_]:=2x^2+y^2-x y-7y; Plot3D[h[x,y],{x,-10,10},{y,-10,10}]



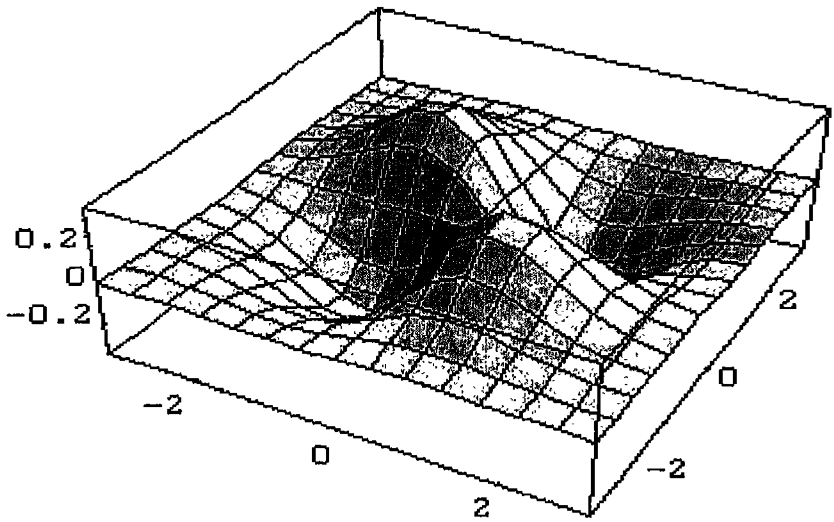
تعريف الدالة $h(x,y) = 2x^2 + y^2 - x y - 7y$ ثم رسمها فى الفراغ فى المنطقة

$$-10 \le x \le 10 \quad , \quad -10 \le y \le 10$$

In[18]:=FindMinimum[h[x,y],{x,2},{y,5}]
Out[18]={-14., {x -> 1., y -> 4.}}

للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب من x=0.4 , y=0.5 وإيجاد القيمة الصغرى للدالة عندها .

In[19]:= g[x_,y_]:=-x y Exp[-(x^2+y^2)/2];
Plot3D[g[x,y],{x,-Pi,Pi},{y,-Pi,Pi}]



تعريف الدالة **g(x,y) =-x y Exp[-(x^2 + y^2)/2]** ثم رسمها فى الفراغ فى المنطقة

$-\pi \leq x \leq \pi \quad , \quad -\pi \leq y \leq \pi$

In[20]:=FindMinimum[g[x,y],{x,0.6},{y,0.5}] للبحث عن نقطة نهاية صغرى محلية للدالة بالقرب من(**0.6,0.5**)وإيجادالقيمةالصغرى للدالةعندها
Out[20]={-0.367879, {x -> 1., y -> 1.}}

In[21]:=FindMinimum[g[x,y],{x,-1.5},{y,-0.5}] للبحث عن نقطةنهايةصغرى محليةللدالةبالقرب من (**-1.5,-0.5**) وإيجادالقيمةالصغرى للدالة عندها
Out[21]={-0.367879, {x -> -1., y ->-1.}}

In[22]:=-FindMinimum[-g[x,y],{x,-1.5},{y,0.5}] للبحث عن نقطةنهايةعظمى محليةللدالةبالقرب من(**-1.5,0.5**)وإيجادالقيمةالعظمىللدالةعندها
Out[22]={0.367879, {-(x -> -1.), -(y -> 1.)}}

In[23]:= -FindMinimum[-g[x,y],{x,1.5},{y,-0.5}] للبحث عن نقطةنهايةعظمىمحليةللدالةبالقرب من(**1.5,-0.5**)وإيجادالقيمةالعظمى للدالةعندها
Out[23]={0.367879, {-(x -> 1.), -(y ->-1.)}}

٤. الحســـــاب العددى للمجموع وحواصل الضرب
Numerical Sum and Product

فى برنامج ماثيماتيكا أمر المجموع Sum[f, {i, imin,imax}] يقوم بحساب قيمـــة مضبوطة للمجموع $\sum_{i=i\,min}^{i\,max} f$ حتى إذا كان المجموع فى صورة رمزية symbolic وفى بعض الحالات لا يستطيع ماثيماتيكا حساب الناتج المضبوط للجمع عن طريق الدالـــة Sum خاصـــة إذا كان ∞ = imax ولمثل هذه الحالات فإنه يمكن حساب قيمة عددية تقريبية للمجمـــوع باستخدام الدالة N بالصورة

N[Sum[f, {i, imin,imax}] أو فى الصورة Sum[f,{i,imin,imax}]//N

وماثيماتيكا يقدم الأمر NSum لحساب قيمة عددية تقريبية للمجموع مباشرة دون الحاجة الى حساب القيمة المضبوطة والتى تتطلب العديد من العمليات وبالمثل يوجد فى ماثيماتيكا الأمر NProduct لحساب قيمة عددية تقريبية لحاصل الضرب

العمل الذى يقوم به الأمر	الصيغة العامة للأمر
إيجاد قيمة عددية تقريبية للمجموع $\sum_{i=1}^{i\,max} f$	NSum[f, {i, imax}]
إيجاد قيمة عددية تقريبية للمجموع $\sum_{i=i\,min}^{i\,max} f$	NSum[f, {i, imin, imax}]
إيجاد قيمة عددية تقريبية للمجموع $\sum_{i=i\,min}^{i\,max} f$ من i=imin الى i=imax بخطوة مقدارها step	NSum[f, {i,imin, imax, step}]
إيجادقيمة عددية تقريبية للمجموع $\sum_{i=i\,min}^{i\,max} \sum_{j=j\,min}^{j\,max} f$	NSum[f, {i, imin, imax}, {j,jmin, jmax}, ...]
إيجاد قيمة عددية تقريبية لحاصل الضرب $\prod_{i=imin}^{imax} f$	NProduct[f, {i, imin, imax}]

ماثيماتيكا لم يتمكن من حساب قيمة مضبوطة للمجموع باستخدام دالة Sum فقط

```
In[1]:=Sum[1/i^3,{i,1,Infinity}]
```

Out[1]=Sum[i^{-3} , {i, 1, Infinity}]

وعنـــــد تطبيق الدالة N أمكن الحصول على قيمة عددية تقريبية للمجموع

```
In[2]:=Sum[1/I^3,{I,1,Infinity}]//N
Out[2]=1.20206
```

باستخدام دالة NSum أمكن مباشرة إيجاد قيمة عددية تقريبية للمجموع

```
In[3]:=NSum[1/i^3,{i,1,Infinity}]
Out[3]=1.20206
```

ماثيماتيكا لم يتمكن من حساب قيمة مضبوطة للمجموع باســتخدام دالة Sum بالرغم من أن imax = 5 فقط

```
In[4]:=Sum[Exp[-n],{n,0,5}]
```

Out[4]=1 + E^{-5} + E^{-4} + E^{-3} + E^{-2} + E^{-1}

باستخدام دالة NSum أمكن مباشرة إيجاد قيمة عدديـــة تقريبية للمجموع حتى مالانهاية

```
In[5]:=NSum[Exp[-n],{n,0,Infinity}]
Out[5]=1.58198
```

لإيجاد قيمة عددية تقريبية لمجموع المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$

In[6]:=NSum[1/n!,{n,0,Infinity}]

Out[6]=2.71828

لإيجاد قيمة عددية تقريبية لمجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

In[7]:=NSum[1/(n(n+1)(n+2)),{n,1,Infinity}]

Out[7]=0.25

لإيجاد قيمةعددية تقريبيةلمجموع المتسلسلة $\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{10}\frac{1}{i^2+j^2}$

In[8]:=NSum[1/(i^2+j^2),{i,1,5},{j,1,10}]

Out[8]=2.39932

لإيجاد قيمة عددية تقريبية لحاصل الضرب $\prod_{i=1}^{5}\frac{1}{i^2}$

In[9]:=Nproduct[1/i^2,{i,1,5}]

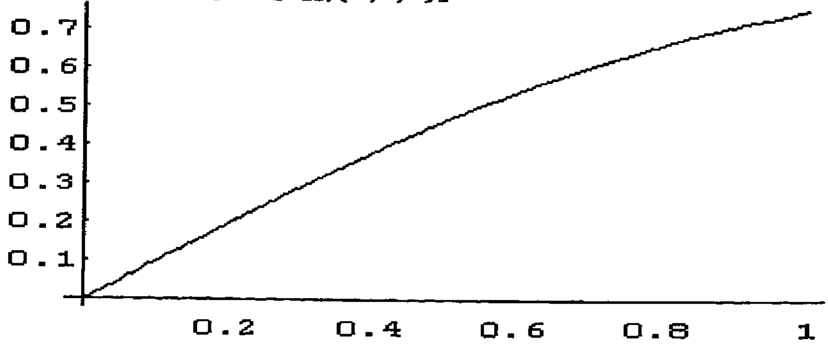
Out[9]=0.0000694444

٥ . التكـــامل العـــددى Numerical Integration

دالة التكامل **Integrate** تقوم بحساب التكامل $\int f(x)\,dx$ بصورة رمزية **symbolic** حيث يتعامل برنامج ماثيماتيكا مع دالة التكامل **f(x)** ويقوم بإجراء متتابعة من القواعد والتحويلات الرمزية وصولا الى القيمة المضبوطة للتكامل فى صورة رمزية وتوجـــد بعض الدوال لا تستطيع دالة **Integrate** الحصول على قيم مضبوطة لتكاملاتها المحـــددة **definite** وفى هذه الحالة يمكن استخدام الدالة **N** لحساب قيمة عددية للتكامل ، وفـــى ماثيماتيكا يوجد الدالة **NIntegrate** لحساب قيمة عددية تقريبية للتكـــامل مباشـــرة دون الحاجة الى حساب القيمة المضبوطة حيث يتم حساب متتابعة من القيم العددية لدالة التكامل عند نقط خاصة فى نطاق التكامل ثم تستخدم هذه القيم فى الوصول الى قيمة عددية تقريبية جيـــدة للتكامل .

N[Integrate[f,{x,xmin,xmax}]]	لحساب قيمة مضبوطة للتكامل $\int_{xmin}^{xmax} f(x)\,dx$ أولا ثم ايجاد قيمة عددية تقريبية بعد ذلك
NIntegrate[f,{x,xmin,xmax}]	لحساب قيمة عددية تقريبيةمباشرة للتكامل $\int_{xmin}^{xmax} f(x)\,dx$
NIntegrate[f,{x,xmin,xmax},{y,ymin,ymax},...]	لحساب قيمة عددية تقريبية مباشرة للتكامل المتعدد $\int_{xmin}^{xmax}\int_{ymin}^{ymax} f(x,y)\,dx\,dy$
NIntegrate[f,{x,xmin,x1,x2,...,xmax}]	حساب قيمة عددية تقريبية مباشرة للتكامل $\int_{xmin}^{xmax} f(x)\,dx$ مع مراعاة النقط الشاذة **x1,x2,...,** لدالة التكامل

In[1]:= Plot[Sin[Sin[x]],{x,0,1}]



In[2]:=Integrate[Sin[Sin[x]],{x,0,1}]

Out[2]= On::none: Message SeriesData::

csa not found

ماثيماتيكا لا يستطيع الحصول على قيمة مضبوطة للتكامل

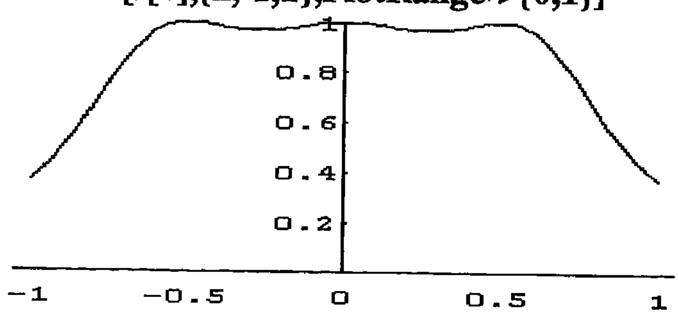
$$\int_0^1 \sin(\sin(x))\,dx$$

In[3]:=N[%]

Out[3]=0.430606

بواسطة الدالة N يمكن إيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل

In[4]:=f[x_]:=Exp[-x^2 Cos[Pi x]^2];
Plot[f[x],{x,-1,1},PlotRange->{0,1}]



In[5]:= NIntegrate[f[x],{x,-1,1}]

Out[5]=1.71167

لحساب قيمة عددية تقريبيةمباشرة للتكامل

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2 \cos^2(\pi x)}\,dx$$

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل $\int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx$

```
In[6]:=NIntegrate[Exp[-2x],{x,0,Infinity}]
Out[6]=0.5
```

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل $\int_0^{3} \sqrt{4+x^3}\,dx$

```
In[7]:=NIntegrate[Sqrt[4+x^3],{x,0,3}]
Out[7]=9.27972
```

لإيجادقيمة عددية تقريبية للتكامل $\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x+\pi}\,dx$

```
In[8]:=NIntegrate[Sin[x]/(Pi+x),{x,0,Pi}]
Out[8]=0.433785
```

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل $\int_0^{2} e^{-x^2}\,dx$

```
In[9]:=NIntegrate[Exp[-x^2],{x,0,2}]
Out[9]=0.882081
```

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل $\int_{-1}^{1} \cos(x^2)\,dx$

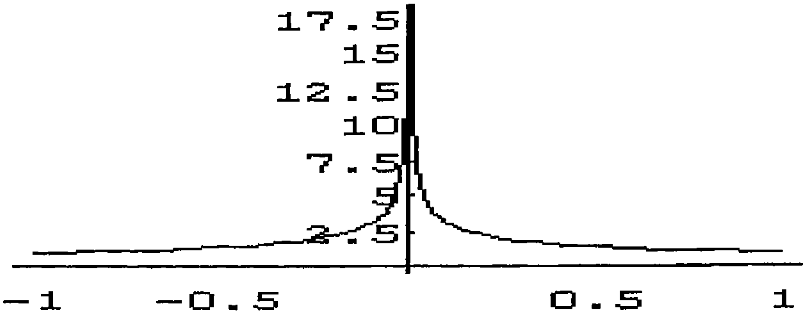
```
In[10]:=NIntegrate[Cos[x^2],{x,-1,1}]
Out[10]=1.80905
```

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل $\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$

```
In[11]:=NIntegrate[1/(x-1)^(1/3),{x,-2,1,2}]
Out[11]=3.06006 - 2.70211 I
```

مع مراعاة النقطة الشاذة $x=1$

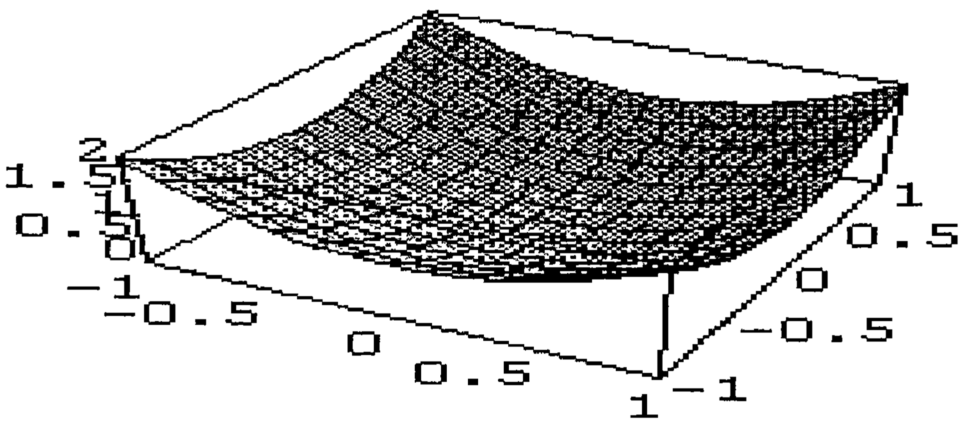
In[12]:=Plot[1/Sqrt[Abs[x]],{x,-1,1}]



لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}} dx$ مع مراعاة النقطة الشاذة **x=0**

In[13]:=NIntegrate[1/Sqrt[Abs[x]],{x,-1,0,1}]
Out[13]=4.

In[14]:=Plot3D[x^2+y^2,{x,-1,1},{y,-1,1}]



لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثنائى $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (x^2 + y^2)\, dx\, dy$

In[15]:=NIntegrate[x^2+y^2,{x,-1,1},{y,-1,1}]
Out[15]=2.66667

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثنائي

$$\int_{-5}^{5}\int_{-3}^{3} e^{\frac{-(x-y)^2}{1+(x+y)^2}}\,dx\,dy$$

In[16]:=NIntegrate[Exp[-(x-y)^2]/(1+(x+y)^2),{x,-3,3},{y,-5,5}]
Out[16]=2.48738

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثنائي

$$\int_{0}^{1}\int_{x^2}^{x} \left(2\,x^2 + y^2\right) dy\,dx$$

In[17]:=NIntegrate[2 x^2+y^2,{x,0,1},{y,x^2,x}]
Out[17]=0.135714

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثلاثي

$$\int_{0}^{1}\int_{0}^{z}\int_{0}^{y+z} x\,y\,z\;\,dx\,dy\,dz$$

In[18]:= NIntegrate[x y z,{z,0,1},{y,0,z},{x,0,y+z}]
Out[18]=0.118056

لإيجاد قيمة عددية تقريبية للتكامل الثلاثي

$$\int_{0}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-y^2}}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\;\,dz\,dx\,dy$$

In[19]:=NIntegrate[zSqrt[x^2+y^2+z^2],{y,0,3},{x,0,Sqrt[9-y^2]},
{z,0,Sqrt[9-x^2-y^2]}]

Out[19]=38.1704

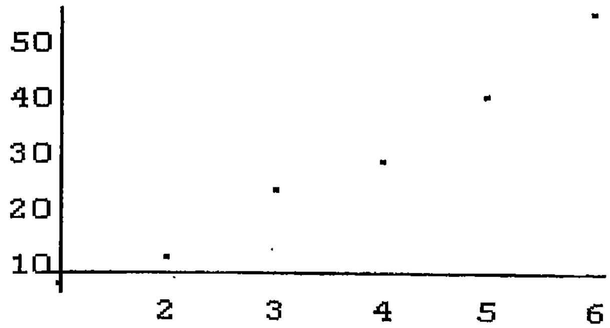
٦ . التقريب بالمربعات الصغرى Least - squares

فى داخل بناء ماثيماتيكا built-in يوجد إمكانات متعددة للحصول على كثيرة حدود المربعات الصغرى التى تلائم قائمة من البيانات والفكرة الأساسية التى يعتمد عليهـا ماثيماتيكـا لملائمة البيانات هو اخذ قائمة من الدوال التى نقوم بتحديدها ثم محاولة إيجاد تركيبة خطية مـن هذه الدوال معا لتقريب البيانات المعطاة باستخدام قاعدة المربعات الصغرى ويتم ذلك عن طريق جعل المقدار $\sum_i |y_i - f_i|^2$ اصغر ما يمكن حيث y_i من البيانات المعطاة , f_i هى القيمة من التركيبة الخطية للدوال التى قام المستخدم بتحديدها ويتم ذلك باستخدام الدالة Fit والصيغة العامة لها كالآتي :

Fit[data,funs,vars]	ملائمة البيانات **data** باستخدام تركيبة خطية من الدوال **funs** فى المتغيرات **vars**
Fit[{y1,y2,...},{f1,f2,...},x]	إيجاد افضل تركيبة خطية من الدوال **f1 , f2,...** تلائم النقط **(1,y1),(2,y2),...** حيث تم اعتبار قيم **x** المناظرة لقيم **yi** هى **xi = i**
Fit[{{x1,y1},{x2,y2},...},{f1,f2,...},x]	إيجاد افضل تركيبة خطية من الدوال **f1,f2,...** تلائم النقط **(x1,y1),(x2,y2),...**

Fit[{y1,y2,...},{1,x},x]	إيجاد افضل خط مستقيم **linear fit** يلائم البيانات **(1,y1),(2,y2), ...**
Fit[{y1,y2,...},{1,x,x^2},x]	إيجاد افضل كثيرة حدود من الدرجة الثانية **Quadratic fit** تلائم البيانات **(1,y1),(2,y2), ...**
Fit[data,Table[x^i,{i,0,n},x],x]	إيجاد افضل كثيرة حدود من درجة **n** تلائم البيانات **data**

In[1]:=data1={6,11,23,28,40,55}; m1=ListPlot[data1]



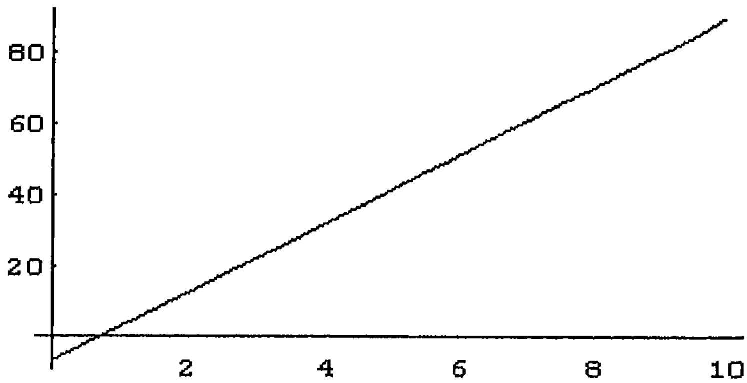
تعريف قائمة data1 من الأعداد
ثم تحديد مواضع هذه الأعداد
فى المستوى

In[2]:= f1=Fit[data1,{1,x},x]

Out[2]=-6.53333 + 9.62857 x

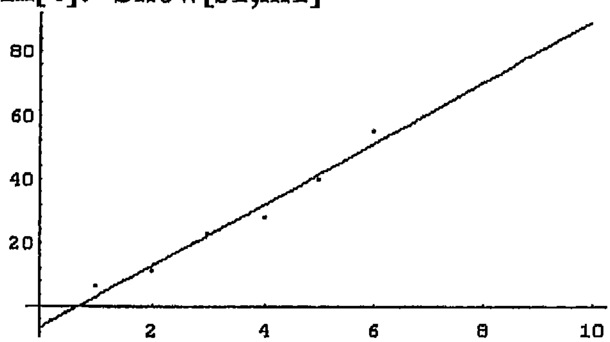
إيجاد معادلة افضل خط مستقيم
يلائم قائمة البيانات data1

In[3]:=s1=Plot[f1,{x,0,10}]



رسم الخط المستقيم f1
الناتج من الدالة Fit

In[4]:=Show[s1,m1]

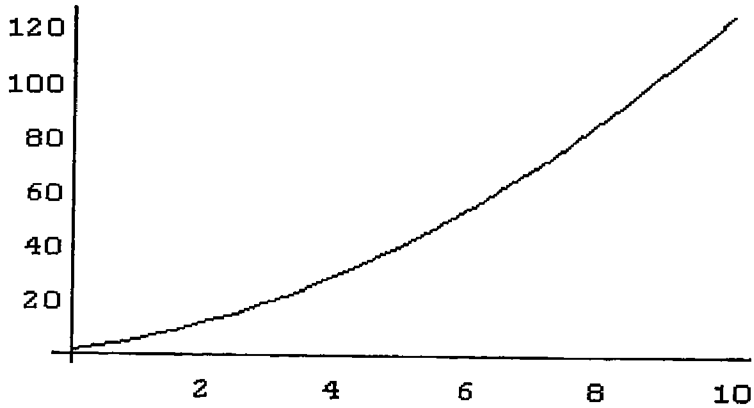


إظهار رسم الخط المستقيم الناتج من
الدالة Fit مع رسم القائمة data1

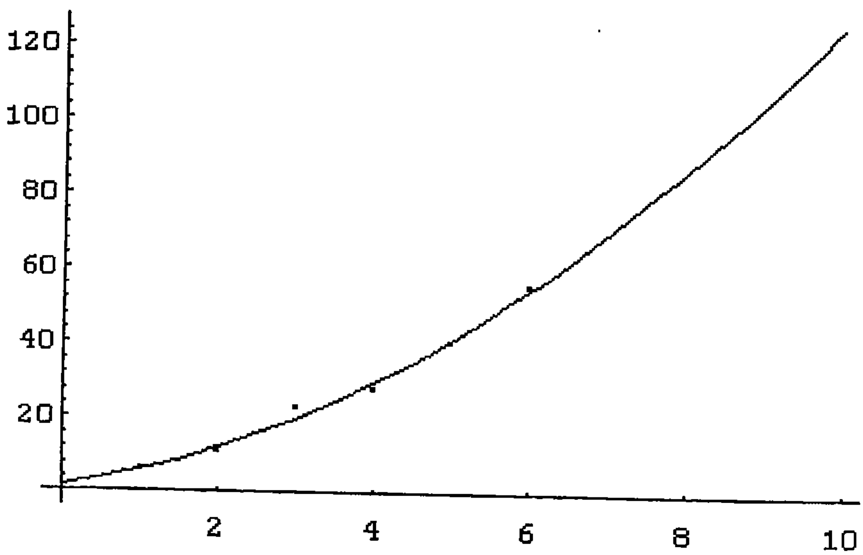
In[5]:= f2=Fit[data1,{1,x,x^2},x] إيجاد افضل كثيرة حدود من الدرجة الثانية

Out[5]=3.37857+1.8x+ 0.892857 x^2 تلائم قائمة البيانات data1

In[6]:= s2=Plot[f2,{x,0,10}] رســـــم كثيرة الحدود f2 الناتجـــة من الدالة Fit



In[7]:= Show[m1,s2]



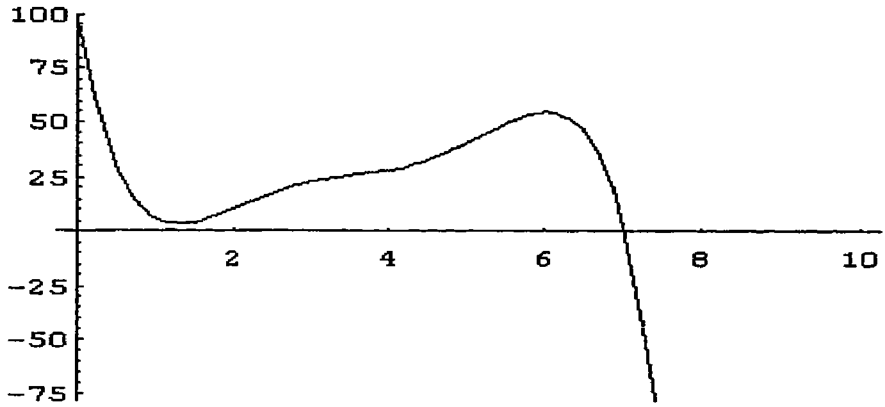
إظهار رسم كثيرة الحدود s2 الناتجة من الدالة Fit مع رسم القائمة data1

إيجاد افضل كثيرة حدود من الدرجة الخامسة تلائم قائمة البيانات **data1** ثم رسم كثيرة الحدود **f3** الناتجة من الدالة **Fit**

In[8]:= f3=Fit[data1,Table[x^i,{i,0,5}],x]

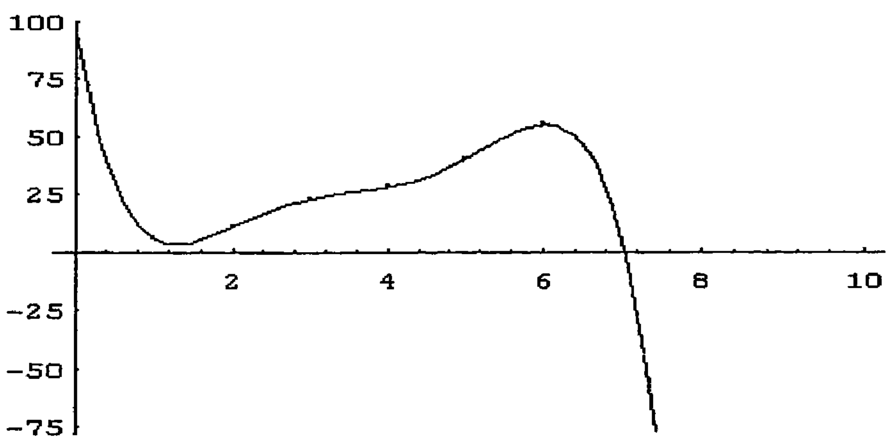
Out[8]=96. - 194.533 x + 144.583 x^2 - 46.5833 x^3 + 6.91667 x^4 - 0.383333 x^5

In[9]:=s3=Plot[f3,{x,0,10}]



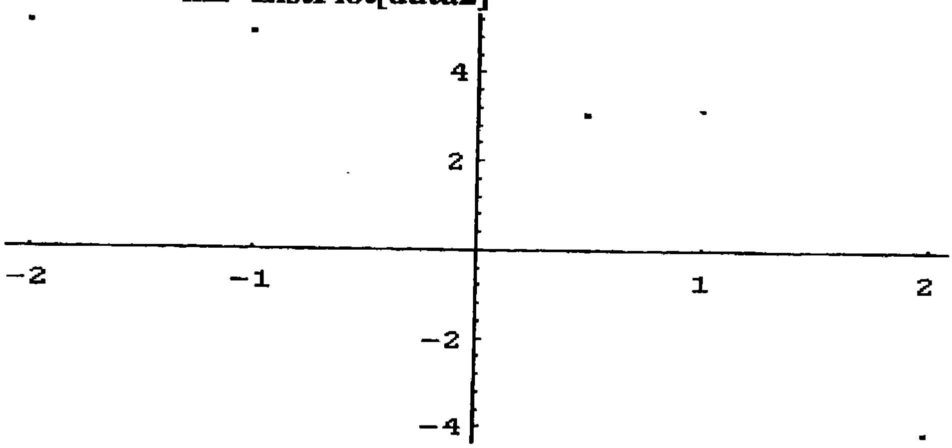
إظهار رسم كثيرة الحدود **s3** الناتجة من الدالة **Fit** مع رسم القائمة **data1**

In[10]:= Show[m1,s3]



تعريف قائمة **data2** من الأعداد ثم تحـــديد مواضع هذه الأعداد في المستوى

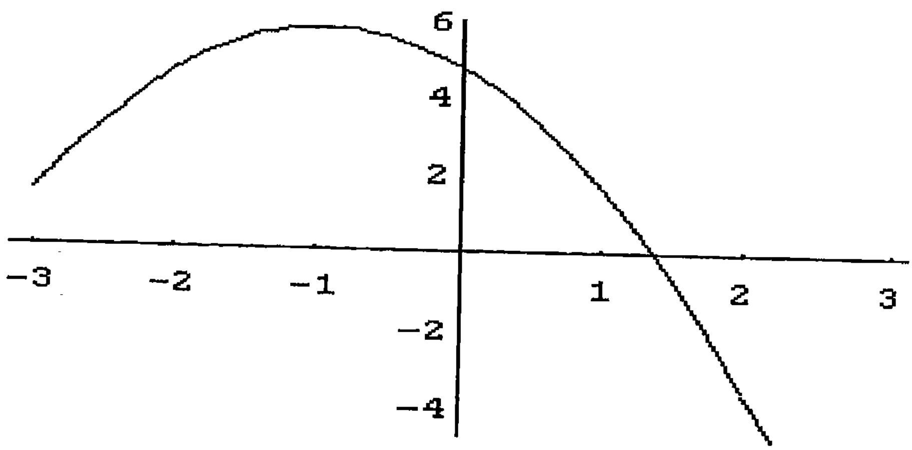
In[11]:= data2={{-2,5.1},{-1,4.9},{0.5,3},{1,3.1},{2,-4.1}};
m2=ListPlot[data2]



إيجاد افضل كثيرة حدود من الدرجة الثانية تلائم قائمة البيانات **data2** ثم رســم كثـــيرة الحدود **f4** الناتجـــة من الدالة **Fit**

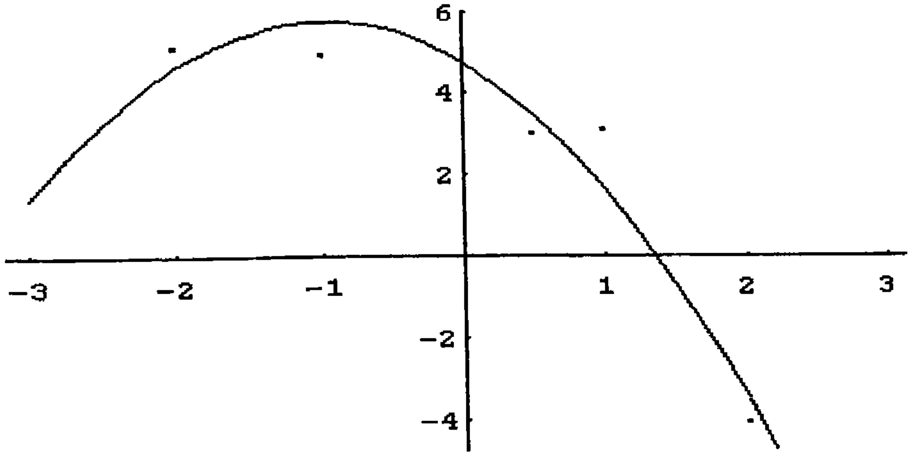
In[12]:= f4=Fit[data2,{1,x,x^2},x]
Out[12]=4.75476 - 2.04354 x - 1.04898 x^2

In[13]:= s4=Plot[f4,{x,-3,3}]



إظهار رسم كثيرة الحدود **s4** الناتجة من الدالة **Fit** مع رسم القائمة **data2**

In[14]:= Show[m2,s4]



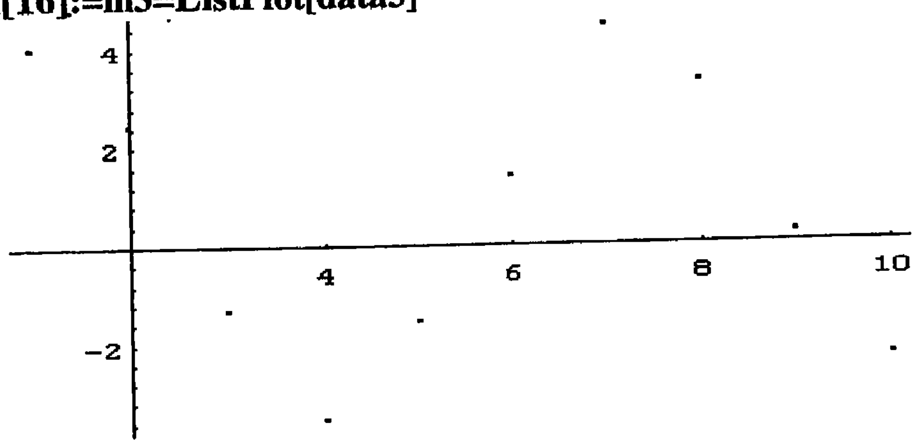
وتعتبر كثيرات الحدود هي الأكثر استخداما مع دالة **Fit** ولكن يمكن استخدام أي دوال أخرى فى قائمة الدوال نرى أنها مناسبة للبيانات مثل الدوال الأسية واللوغاريتمية والمثلثية والزائدية ... الخ .

تعريف قائمة **data3** من الأعداد ثم تحديد مواضع هذه الأعداد فى المستوى

In[15]:=data3=Table[N[Random[]+2Cos[x]+3Sin[x]],{x,1,10}]

**Out[15]={4.02232, 2.45486, -1.32769, -3.54897, -1.54028,
1.4028, 4.47493, 3.28246, 0.177847, -2.3534}**

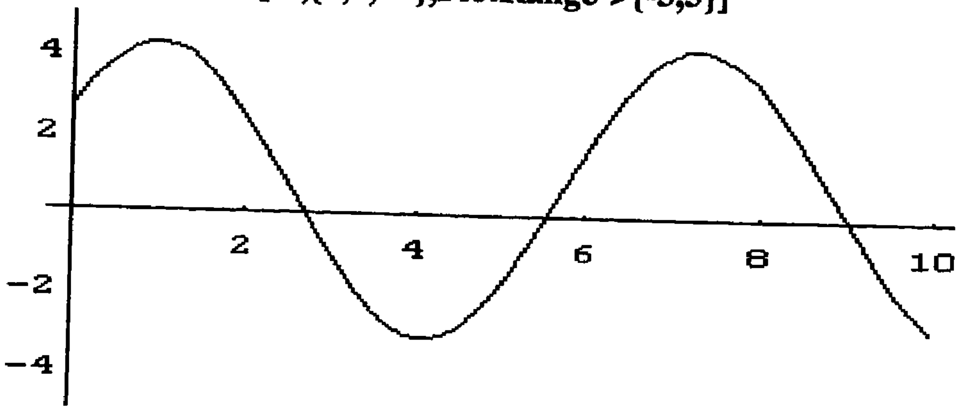
In[16]:=m3=ListPlot[data3]



إيجاد افضل تركيبة خطية من مجموعة الدوال {1,Cos(x),Sin(x)} بحيث تلائم قائمـــة البيانات data3 ثم رســـم المعادلة f5 الناتجـــة من الدالة Fit

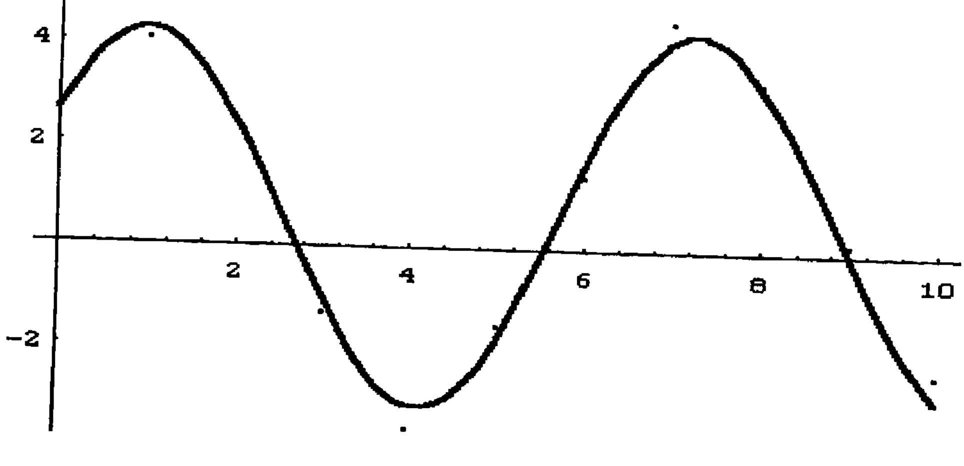
In[17]:=f5=Fit[data3,{1,Cos[x],Sin[x]},x]
Out[17]=0.56281 + 2.04344 Cos[x] + 3.05647 Sin[x]

In[18]:=s5=Plot[f5,{x,0,10},PlotRange->{-5,5}]

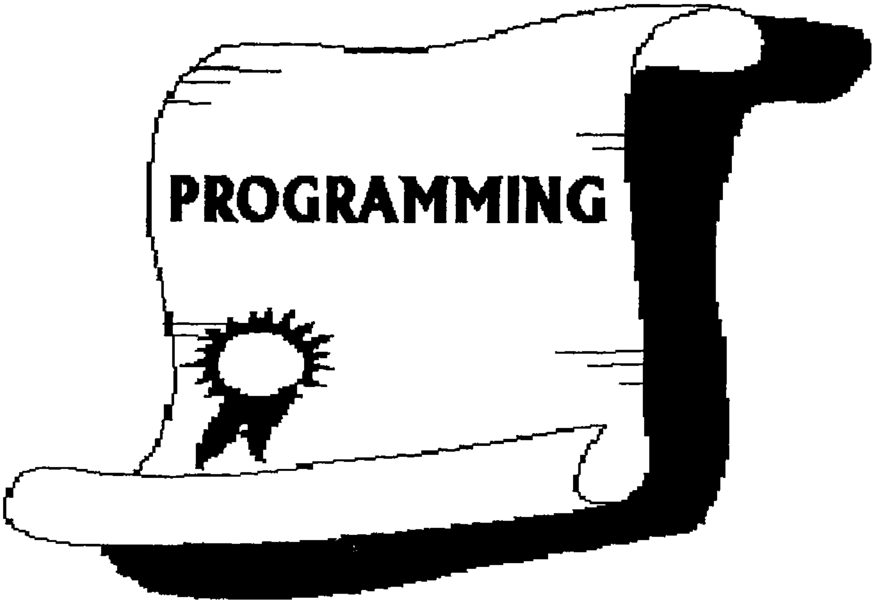


إظهار رسم المعادلة s5 الناتجة من الدالة Fit مع رسم القائمة data3

In[19]:=Show[m3,s5]



الباب السابع
البرمجة فى ماثيماتيكا



فى هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكا والخاصة بالموضوعات الآتية :

١ـ منظومة الإجراءات **Procedure**

٢ـ الحلقات التكرارية **Loops**

٣ـ أوامر الانتقال المشـروط **Conditionals**

الباب السابع

البرمجـة فى ماثيماتيكـــا

عند بناء الحسابات فى ماثيماتيكا غالبا ما نحتاج أن نربط مجموعة الأوامر معا ويمكن أن يتم ذلك باستخدام منظومة إجراءات Procedure .

١ . منظومة الإجراءات Procedure

منظومة الإجراءات هى عبارة عن متتابعة من أوامر أو تعبيرات ماثيماتيكا بحيث يفصل بين كلا منها علامة الفصلة المنقوطة ; وقيمة التعبير الأخير فى المنظومة يمثل الناتج النهائى .

تعريف منظومة تتكون من مجموعة من الأوامر

Command1;Command2;...

In[1]:=r=(1+x)^2;r=Expand[r];r-1
Out[1]= $2x + x^2$

فى هذا المثـــال نلاحظ أن منظومة الإجراءات عبارة عن ثلاثة تعبيرات حســـابية يفصل كل منها عن الآخر بفصلة منقوطة كما نلاحظ أن الناتج النهائى هــو قيمة التعبير الأخير (r - 1) فى منظومة الإجراءات .

ويمكن تعريف الدالة كمنظومة إجراءات حيث نستخدم الأقواس ( ) لتوضيح أن كل الإجراءات معا تمثل الدالة f

```
In[2]:= f[x_]:=(t=(1+x)^2;t=Expand[t])
```

لحساب قيمة الدالة f عند x=a

```
In[3]:= f[a]
```

Out[3]= $1+2a+a^2$

عند الاستعلام عن قيمة t نجد أن المتغير t اصبح يمثل القيمة $1+2a+a^2$ ويحتفظ بها حتى بعد الخروج من المنظومة .

```
In[4]:= t
```

Out[4]= $1 + 2 a + a^2$

وفى كثير من الأحيان نحتاج الى أن نجعل المتغيرات المستخدمة داخل أى منظومة إجراءات كمتغيرات موضعية (Local) بمعنى أن هذه المتغيرات تحتفظ بالقيم داخل منظومة الإجـــراءات فقط ولكن تفقد هذه القيم بعد إنهاء الحسابات فى المنظومة والخروج منها ويتم عمل ذلك فـــى ماثيماتيكا باستخدام الأمر Block أو الأمر Module كالآتى :

للإعلان عن أن المتغيرات ...x,y, تمثل متغيرات موضعيـــة داخـــل منظومـــة الإجـــراءات **procedure** **Block[{x, y, ...}, procedure]** **Or** **Module[{x, y, ...}, procedure]**
تحديد القيم الابتدائية ... x = xo , y = yo, للمتغيرات الموضعية داخل منظومة الإجـــــراءات **procedure** **Block[{x=xo, y=yo, ...}, procedure]** **Or** **Module[{x = x0, y=yo, ...}, procedure]**

وبذلك فإنه بواسطة الأمر Block أو الأمر Module يمكن تعريف أى متغيرات داخـــل منظومة الإجراءات الواحدة دون التأثير على القيم بخارج المنظومة وبالتالى يمكن تعريـــف نفـــس المتغير الموضعى داخل اكثر من منظومة إجراءات .

عند استخدام الأمر Block فى تعريف الدالة g فان u يعامل كمتغير موضعى

```
In[5]:=
g[x_]:=Block[{u},u=(1+x)^2;u=Expand[u]]
```

لحساب قيمة الدالة g عند x = a

```
In[6]:= g[a]
Out[6]= 1 + 2a + a^2
```

عند الاستعلام عن قيمة u نلاحظ عدم وجود قيمة لأن u متغير موضعى

```
In[7]:=u
Out[7]=u
```

تعريف x=5 خارج المنظومة ثم استخدام الأمر Module واعتبار أن x متغير موضعى وطباعة قيمة عشوائية للمتغير x

```
In[8]:=x=5;
Module[{x},x=Random[];Print[x];]
Out[8]=0.863718
```

عند الاستعلام عن قيمة x نلاحظ أن x = 5 وهى القيمة الموجودة خارج الأمر Module

```
In[9]:=?x
Out[9]=Global`x
x = 5
```

٢ . الحلقات التكرارية Loops

منظومة الإجراءات تسمح بتنفيذ مجموعة من تعبيرات ماثيماتيكا وفقا لترتيب هذه التعبيرات داخل منظومة الإجراءات وفى كثير من الأحيان نحتاج الى تنفيذ بعض العمليات بصورة متكررة ويتم ذلك داخل ماثيماتيكا باستخدام أوامر خاصة بالحلقات المتكررة Loops حيث تعمل الحلقات المتكررة على تكرار مجموعة متتالية من الأوامر بصورة متكررة لعدد محدود من المرات مع إمكانية التغيير الأوتوماتيكى لقيم المتغيرات داخل الحلقات التكرارية ، ومن أوامر ماثيماتيكا الخاصة بالحلقات التكرارية هو الأمر Do والذى يستخدم بصورة مشابهة كما فى لغات البرمجة مثل فورتران FORTRAN والأمر Do له استخدامات متعددة وصيغته العامة موضحه بالجدول الآتى :

الوظيفة التى يقوم بها الأمر	الصيغة العامة للأمر
حساب قيمة expr عدد n من المرات	Do[expr,{n}]
حساب قيمة expr بصورة متكررة وفقا للعداد i من i=1 الى i=imax بخطوة تساوى 1	Do[expr,{i,imax}]
حساب قيمة expr بصورة متكررة وفقا للعداد i من i=imin الى i=imax بخطوة تساوى 1	Do[expr,{i,imin,imax}]
حساب قيمة expr بصورة متكررة وفقا للعداد i من i=imin الى i=imax بخطوة تساوى istep	Do[expr,{i,imin,imax,istep}]
حساب قيمة expr لقيم i , j المعطاة	Do[expr,{i,imin,imax}, {j,jmin, jmax}]

في هذه الحلقة يتم حساب التعبير t=2(1+t) ثلاث مرات حيث t=x

```
In[1]:=t=x;Do[t=2(1+t),{3}];t
Out[1]=2 (1 + 2 (1 + 2 (1 + x)))
```

في هذه الحلقة يتم طباعة m^2 لقيم m من 1 الى 3

```
In[2]:=Do[Print[m^2],{m,3}]
Out[2]= 1
        4
        9
```

في هذه الحلقة يتم حساب التعبير $a = i^2 + 3j$ ثم طباعته لقيم i,j المعطاة

```
In[3]:=Do[a=I^2+3j;Print[a],{I,2},{j,I}]
Out[3]= 4
        7
        10
```

وفي برنامج ماثيماتيكا يمكن تكرار تطبيق نفس الدالة عدد محدود من المرات على تعبير معين باستخدام الأمر Nest كالآتي :

Nest[f,expr,n]	تطبيق الدالة f على التعبير expr لعدد n من المرات

لحساب f (f (f (x)))

```
In[4]:=Nest[f,x,3]
Out[4]= f[f[f[x]]]
```

تعريف الدالة $f(x) = (x+1)^2$ ثم حساب f (f (x))

```
In[5]:=f[x_]=(x+1)^2;Nest[f,x,2]
Out[5]=(1 + (1 + x)^2 )^2
```

لحساب f (f (1))

```
In[6]:= Nest[f,1,2]
Out[6]= 25
```

وفي برنامج ماثيماتيكا يمكن بناء الحلقات بحيث يتم إيقاف تنفيذ التكرار إذا لم يتحقق شرط معين وذلك باستخدام الأوامر **While , For** كالآتي :

الوظيفة التي يقوم بها الأمر	الصيغة العامة للأمر
حساب قيمة **start** والتحقق من الشرط **test** لتنفيذ **body** مع تكرار إضافة **step**	**For[start,test,step,body]**
يتم تكرار تنفيذ **body** إذا كان الشرط **test** متحقق	**While[test,body]**

حلقة باستخدام **For** حيث يتم البدء بقيمة **i=0** والتحقق من الشرط **i<3** لتنفيذ طباعة **i** مع إضافة **1** الى **i**

```
In[7]:=For[i=0,i<3,i=i+1,Print[i]]
Out[7]=
        0
        1
        2
```

تنفيذ الحلقة السابقة باستخدام **While**

```
In[8]:=i=0;While[i<3,Print[i];i=i+1]
Out[8]=
        0
        1
        2
```

وعند استخدام أوامر الحلقات فى ماثيماتيكا خاصة مع الأوامر While , For غالبا ما نحتاج الى تكرار تعديل قيم فى بعض المتغيرات المستخدمة داخل الحلقة ، وتوجد بعض الطرق المختصرة لأجراء مثل هذه التعديلات فى قيم المتغيرات والجدول الآتى يوضح ذلك .

معنى العملية المختصرة	العملية المختصرة
زيادة قيمة i بمقدار 1 فيما يستجد مع الاحتفاظ بقيمة i السابقة داخل i++	i++
نقصان قيمة i بمقدار 1 فيما يستجد مع الاحتفاظ بقيمة i السابقة داخل i--	i--
زيادة قيمة i بمقدار 1 وجعل i هى القيمة الجديدة آي أن ++i تمثل i+1	++i
نقصان قيمة i بمقدار 1 وجعل i هى القيمة الجديدة آي أن --i تمثل i-1	--i
زيادة قيمة i بمقدار d آي أن i=i+d	i+ = d
نقصان قيمة i بمقدار d آي أن i=i-d	i- = d
ضرب x فى العدد c آي أن x = x * c	x*=c
قسمة x على العدد c آي أن x = x / c	x/=c
استبدال قيم x , y آي تغيير قيمة x لتصبح y وتغيير قيمة y لتصبح x	{x,y}={y,x}

في هذا المثال يتم طباعة قيمة i++ وقيمة i
ونلاحظ أن قيمة i++ هي قيمة i قبل الزيادة

```
In[9]:=i=5;Print[i++];Print[i]
Out[9]=
        5
        6
```

في هذا المثال يتم طباعة قيمة ++i وقيمة i
ونلاحظ أن قيمة ++i هي قيمة i بعد الزيادة

```
In[10]:=i=5;Print[++i];Print[i]
Out[10]=
        6
        6
```

في هذه المنظومة تم وضع r=x ثم زيادة قيمة r
بمقدار 3y فتصبح قيمة r الجديدة x+3y

```
In[11]:=r=x;r+=3y;r
Out[11]=x + 3 y
```

استبدال قيم a , b

```
In[12]:=a=3;b=7;Print[{a,b}];
        {a,b}={b,a};Print[{a,b}]
Out[12]=
        {3, 7}
        {7, 3}
```

استبدال قيم x , y , z

```
In[13]:=x=1;y=2;z=3;Print[{x,y,z}];
        {x,y,z}={z,x,y};Print[{x,y,z}]
Out[13]=
        {1, 2, 3}
        {3, 1, 2}
```

```
In[14]:=For[i=1;t=x,i^2<10,i++,t=t^2+i;Print[t]]

Out[14]=
```

$$1+x^2$$
$$2+\left(1+x^2\right)^2$$
$$3+\left(2+\left(1+x^2\right)^2\right)^2$$

هذه الحلقة على الصورة **For[start,test,step,body]** حيث

start	**i=1 ; t=x**
test	**i^2<10**
step	**i++**
body	**t=t^2+i ; Print[t]**

٣ . أوامر الانتقال المشروط Conditionals

عند بناء منظومة الإجراءات Procedure فى ماثيماتيكا غالبا ما نحتاج الى تنفيذ بعض العمليات إذا تحقق شروط معينة ويتم ذلك فى ماثيماتيكا باستخدام أوامر الانتقال المشروط الآتية :

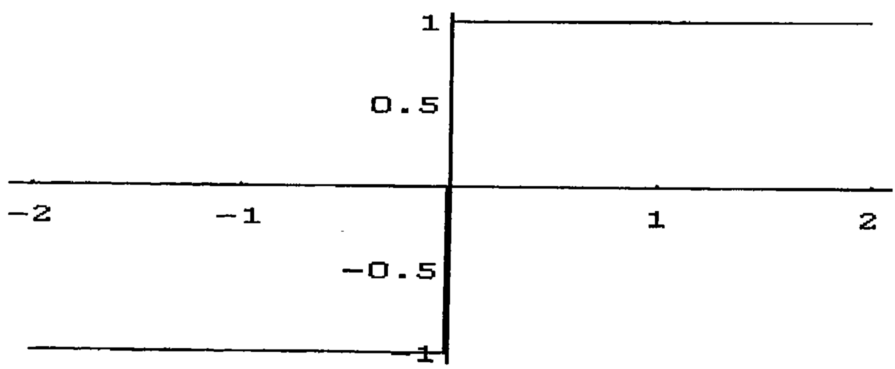
الوظيفة التى يقوم بها الأمر	الصيغة العامة للأمر
يتم تنفيذ then إذا كان test تحقق وخلاف ذلك يتم تنفيذ else	If[test,then,else]
إذا كان test تحقق يتم تنفيذ then وإذا كان test غير متحقق يتم تنفيذ else وخلاف ذلك يتم تنفيذ unknown	If[test,then,else,unknown]
يتم تنفيذ value المناظرة الى أول اختبار testi يتحقق	1,value1,test2,value 2, ...]

```
In[1]:= x=3;y=5;
      If[ x > y , Print[x] , Print[y] ]
Out[1]=
        5
```

إدخال قيم x , y ثم طباعة العدد الأكبر وقد تم استخدام أمر الانتقال المشروط If . على الصورة If[test,then,else] حيث

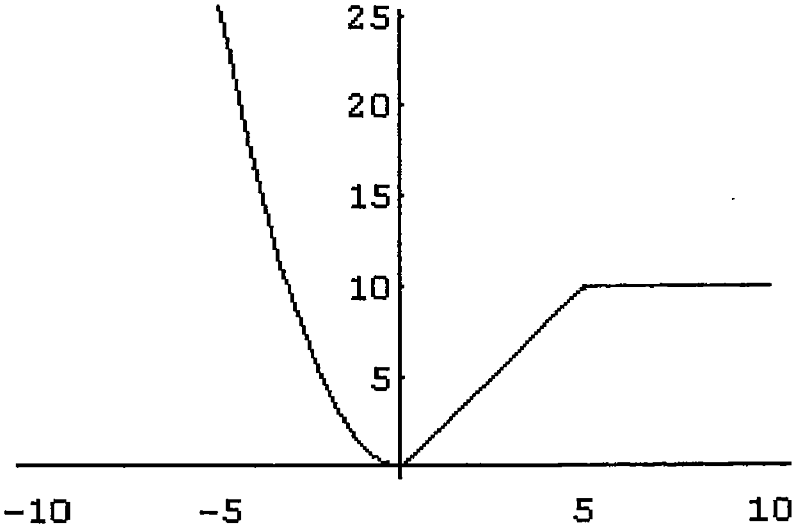
test	x > y
then	Print[x]
else	Print[y]

```
In[2]:=f[x_]:=If[x>0,1,-1];
             Plot[f[x],{x,-2,2}]
```



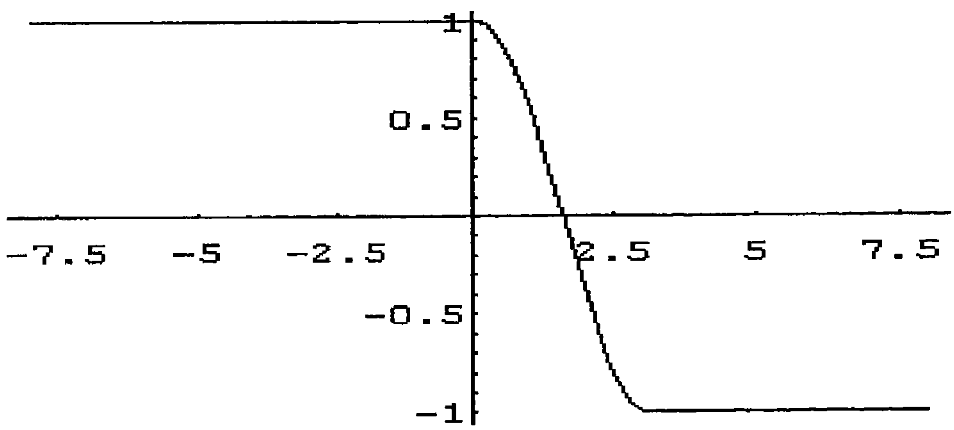
استخدام الأمر If في تعريف الدالة f[x] ثم رسم الدالة

```
In[3]:=r1[x_]:=Which[x<0,x^2,x>0 && x<5 ,2x,True,10];
        Plot[r1[x],{x,-10,10}]
```



استخدام الأمر **Which** فى تعريف الدالة **r1[x]** ثم رسم الدالة

```
In[4]:=r2[x_]:=Which[x<0,1,x<N[Pi],Cos[x],True ,-1];
        Plot[r2[x],{x,-8,8}]
```



استخدام الأمر **Which** فى تعريف الدالة **r2[x]** ثم رسم الدالة

منظومة تم فيها تعريف قائمة a من الأعـــداد الحقيقية ثم حســـاب وطباعـــة العدد الأصغر من القائمة

```
In[5]:=a={5,2,7,55,-4,9,3,10,-24,44,65,-21};mi=a[[1]];
      Do[If[mi>a[[i]],mi=a[[i]],++i],{i,1,Length[a]-1}];
      Print["Minimum of the list   a = ",mi]

Out[5]= Minimum of the list   a =  -24
```

منظومة تم فيها حســـاب وطباعـــة العـــدد الأكبر من القائمة a

```
In[6]:= ma=a[[1]];
      Do[If[ma<a[[i]],ma=a[[i]],++i],{i,1,Length[a]-1}];
      Print["Maximum of the list   a = ",ma]

Out[6]= Maximum of the list   a = 65
```

منظومة تم فيها حســـاب وطباعة العـــدد الأصغر والعدد الأكبر من القائمة a

```
In[7]:= mi=a[[1]];ma=a[[1]];
      Do[Which[mi>a[[i]],mi=a[[i]],ma<a[[i]],ma=a[[i]]];++i,
          {i,2,Length[a]-1}];
       Print["Minimum of the list a = ",mi];
       Print["Maximum of the list a = ",ma]

Out[7]= Minimum of the list a = -24
         Maximum of the list a = 65
```

وباستخدام الدوال الموجودة داخل بناء ماثيماتيكا يمكن حساب

العدد الأصغر من القائمة مباشرة باستخدام الدالة Min

والعدد الأكبر من القائمة مباشرة باستخدام الدالة Max

```
In[8]:=Min[a]
Out[8]=-24

In[9]:=Max[a]
Out[9]=65
```

المراجـــع

[1] - Wolfram , Stephen
Mathematica : A System for Doing Mathematics by Computer ,
Second Edition , Addison Wesley , 1991 .

[2] - Wolfram , Stephen
Mathematica : The Student Book ,
Addison Wesley , 1994 .

[3] - Abell , Martha L . and Braselton, Tames P . ,
The Mathematica Handbook
Academic Press , 1992 .

[4] - Maeder , Roman ,
Programming in Mathematica ,
Addison Wesley , 1992 .

رقم الإيداع : ٥٦١٦/٢٠٠٠

مطابع الدار الهندسية ت : ٥٤٠٢٥٩٨